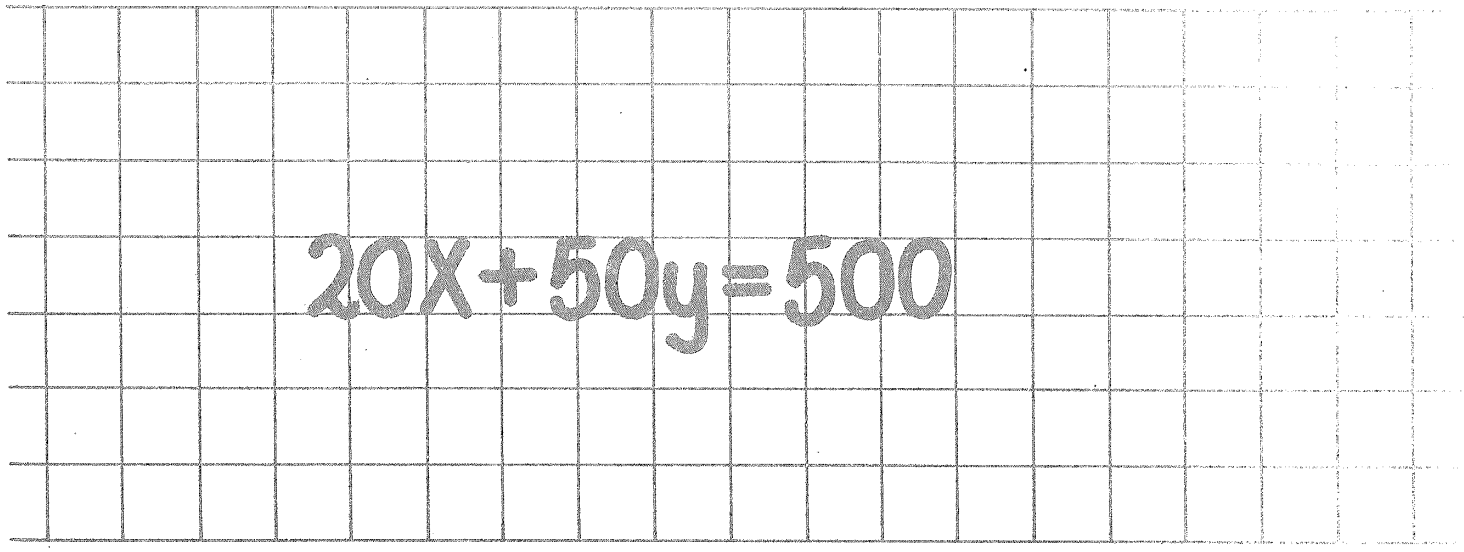
SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. ***Sistemas de ecuaciones de primer grado***
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

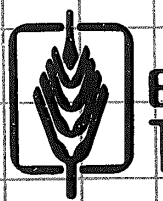
Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 3

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Conrado Flores García



EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1517-9

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

3.1 Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas como modelo matemático 9

3.2 Conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas 19

3.3 Método de reducción 27

3.4 Método de igualación 45

3.5 Método de sustitución 52

3.6 Tres clases de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas 60

3.7 Sistemas con coeficientes en $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ 70

3.8 Sistemas "no ordenados" de dos ecuaciones con dos incógnitas 85

3.9. Sistemas con más de dos ecuaciones 92

3.10 Método de determinantes 105

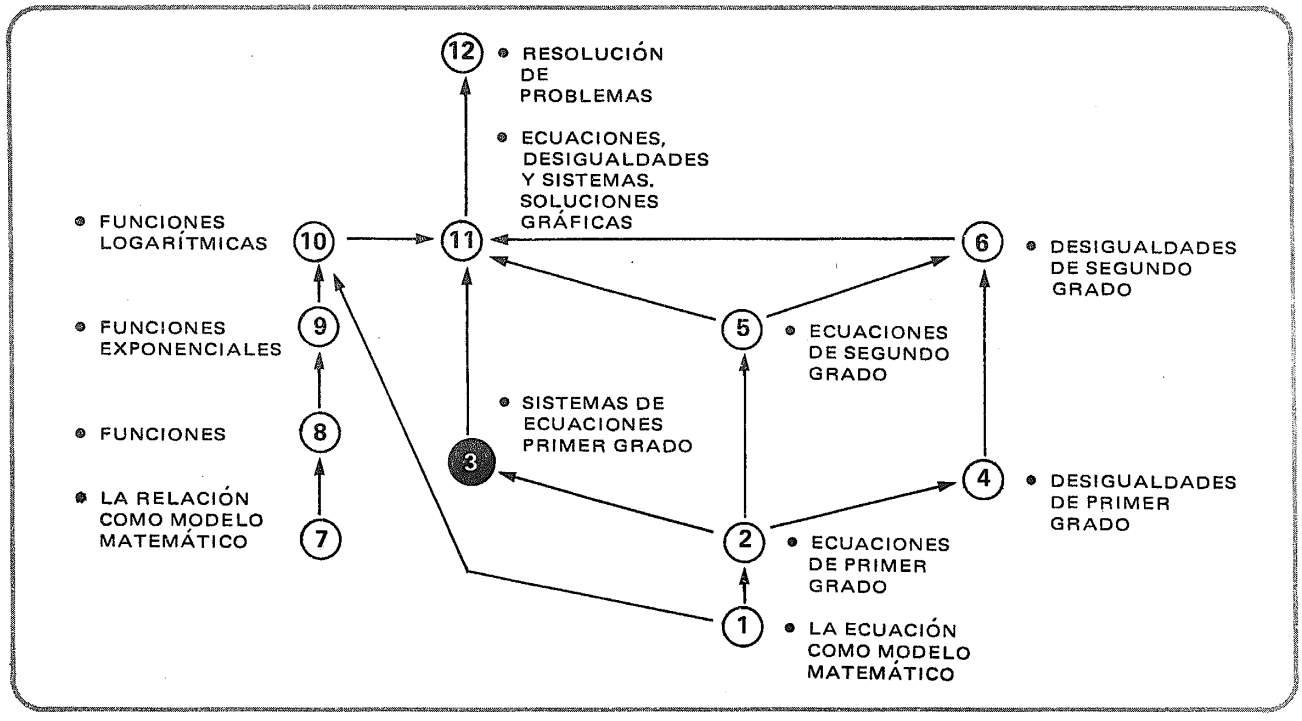
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 3. Sistemas de ecuaciones de primer grado

Objetivos: resolver sistemas de ecuaciones de primer grado

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Resolución de ecuaciones de primer grado	2	2

3.1

Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas como modelo matemático

1

Veamos este acertijo.

Alguien ofrece la cantidad de quinientos pesos a la persona que reúna cinco pesos . . . en un total de

20 monedas

de veinte y cincuenta centavos.

2

"Basta con que se presente en una hoja de papel una relación que indique el número de monedas de cada denominación."

3

Intentemos resolver
el acertijo
mentalmente.

4

Ahora, expresemos
matemáticamente el problema.

5

Llamemos

x al **número de monedas de 20 centavos**

y

y al **número de monedas de 50 centavos**

6

El número total de monedas debe ser **20;**
por lo tanto,
podemos escribir:

$x + y = 20$

7

El

importe en monedas de 20 centavos

lo podemos escribir así:

- $20x$
  importe en centavos,

  o bien:

- $0.20x$
  importe en pesos

8

El importe en monedas de

50 centavos

puede ser escrito así:

en centavos $50y$

o bien:

en pesos $0.50y$

9

Hemos encontrado: $\boxed{x + y = 20}$

$\boxed{20x}$ ⟵ importe en centavos ⟶ $\boxed{50y}$

o bien: o bien:

$\boxed{0.20x}$ ⟵ importe en pesos ⟶ $\boxed{0.50y}$

Sabemos también que

el importe total debe ser de 5 pesos;

por lo tanto:

└──────────────────────┘

- en centavos: $20x + 50y = 500$
- en pesos: $0.20x + 0.50y = 5$

10

Estudiar con atención.

$\boxed{x + y = 20}$

$\boxed{20x}$ ⟵importes parciales en centavos⟶ $\boxed{50y}$

$\boxed{0.20x}$ ⟵importes parciales en pesos⟶ $\boxed{0.50y}$

$\boxed{20x + 50y = 500}$ ⟵importe total en centavos

o bien:

$\boxed{0.20x + 0.50y = 5}$ ⟵importe total en pesos

11

Señalar la opción correcta y completar.

Las ecuaciones

$$20x + 50y = 500$$

y

$$0.20x + 0.50y = 5$$

son equivalentes/no son equivalentes

porque └──────────┘

- son equivalentes
- la primera puede ser transformada en la segunda

  multiplicando

  sus dos miembros por $\frac{1}{100}$;

  o bien:

  la segunda puede ser transformada en la primera,

  multiplicando

  sus dos miembros por 100

12

$$x + y = 20$$

Seleccionamos arbitrariamente la ecuación que nos representa el importe en centavos:

$$20x + 50y = 500$$

13

Hemos obtenido dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x + y = 20$$

$$20x + 50y = 500$$

Indiquemos su dominio:

$x, y \in$ ⌊_____⌋

$\mathbb{N}$

14

$$x + y = 20$$

$$20x + 50y = 500$$

$x, y \in \mathbb{N}$

Este es el modelo matemático de la situación.

Es un caso particular de lo que llamaremos:

sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

15

$$x + y = 20$$

$$20x + 50y = 500$$

$x, y \in \mathbb{N}$

El **conjunto solución** consistirá de todos los **pares de sustitutos para x e y** que satisfagan **simultáneamente** las dos ecuaciones.

Por esa razón suele llamarse

ecuaciones simultáneas

a las de esta clase.

16

Práctica de formación de
sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

17

Se requiere encontrar dos números cuya suma sea 10 y cuya diferencia sea 2:

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

18

$x + y = 10$

$x - y = 2$

Por cálculo mental:

$x =$ ⌊____⌋

$y =$ ⌊____⌋

6

4

19

Dos números enteros cuya suma sea 24
y cuya diferencia sea 0:

⌊_____⌋

⌊_____⌋

$x + y = 24$

$x - y = 0$

$x, y \in \mathbb{Z}$

20

$x + y = 24$

$x - y = 0$

Por cálculo mental:

$x =$ ⌊____⌋

$y =$ ⌊____⌋

12

12

21

Dos números racionales cuya suma sea 7 y cuyo producto 12:

$$x + y = 7$$

$$xy = 12$$

$$x, y \in \mathbb{Q}$$

22

$$x + y = 7$$

$$xy = 12$$

Por cálculo mental:

$x =$ 4

$y =$ 3

23

Dos números reales, tales que, su semisuma sea 5 y su semidiferencia sea 2:

- $\dfrac{x + y}{2} = 5$
- $\dfrac{x - y}{2} = 2$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

los números son:

$x = 7$

$y = 3$

24

La suma del doble de un número y el triple de otro es 22:

La diferencia de los dos números es 1:

- $2x + 3y = 22$
- $x - y = 1$

los números son:

$x = 5$

$y = 4$

25

La suma de la mitad de un número entero y un tercio de otro es 11:

La diferencia de los dos números es -3:

- $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 11$
- $x - y = -3$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$x = 12$

$y = 15$

26

Un número entero es igual al triple de otro:

El doble del número mayor es igual al triple del menor, disminuido en 6:

Atención.

- $x = 3y$
- $2x = 3y - 6$

(el triple de:
el menor disminuido en 6
se expresaría
$3(y - 6)$
de acuerdo con nuestra convención)

$x = -6$

$y = -2$

2.3.1.1

Práctica adicional de

formación de sistemas de dos

ecuaciones con dos incógnitas,

si se considera necesario.

2.3.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas como el modelo matemático de una situación real;
- *formar*, a partir de un enunciado dado, un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

3.2

Conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

27

Señalar la opción correcta y completar.

Consideremos este sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas: ➡

$$\begin{cases} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{N}$

El par de sustitutos $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

satisface / **no satisface** la ecuación ① porque ____

- **no satisface,**

  porque $0, 1 \in \mathbb{N}$;

  pero:

  $(0) + (1) = 10$
  nos conduce a
  $1 = 10$
  que es una proposición cerrada falsa (PCF).

28

Señalar la opción correcta y completar.

$$x + y = 10 \quad ①$$

$$x - y = 2 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{N}$

El par de sustitutos $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

satisface / **no satisface** la ecuación ① porque ____

- **no satisface**

  porque $1, 3 \in \mathbb{N}$

  pero:

  $(1) + (3) = 10$

  $4 = 10$
  ▲
  PCF

29

Señalar la opción correcta y completar.

$$x + y = 10 \quad ①$$

$$x - y = 2 \quad ②$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

El par de sustitutos $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$

satisface / **no satisface** la ecuación ① porque _____

- **satisface**

$4, 6 \in \mathbb{N}$

y

$(4) + (6) = 10$

$10 = 10$

PCV

30

Señalar la opción correcta y completar.

$$x + y = 10 \quad ①$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

El par $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$

satisface / **no satisface** la ecuación ① porque _____

- **satisface**

$3, 7 \in \mathbb{N}$

y

$(3) + (7) = 10$

$10 = 10$

PCV

31

Señalar la opción correcta y completar.

$$x + y = 10 \quad ①$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

El par $\begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$

satisface / **no satisface** la ecuación ① porque _____

- **satisface**

$9, 1 \in \mathbb{N}$

y

$(9) + (1) = 10$

$10 = 10$

PCV

32

Atención.

$x + y = 10$ ①

$x, y \in \mathbb{N}$

El par $\begin{cases} x = 7 \\ y = \square \end{cases}$

satisface la ecuación ① .

• 3

En efecto:

(7) + (3) = 10

10 = 10

PCV

Ver cuadro siguiente.

33

Observar con atención.

Si $x + y = 10$

y $\boxed{x = 7}$

entonces:

$y = 10 - x$

$y = 10 - (7)$

$\boxed{y = 3}$

34

De manera similar,

si $x - y = 8$

y $x = 1$

entonces:

$y = \square$

• $-y = 8 - x$
$y = -8 + x$
$y = x - 8$
$y = (1) - 8$
$y = 1 - 8$

• $y = -7$

En efecto:

(1) − (− 7) = 8

1 + 7 = 8

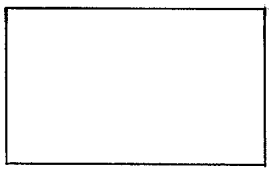
8 = 8 ◄ PCV

35

Si $3x + 2y = 12$

y $x = 2$

entonces:



$y =$ ⌊___⌋

- $2y = 12 - 3x$

$$y = \frac{12 - 3x}{2}$$

$$y = \frac{12 - 3(2)}{2}$$

$$y = \frac{12 - 6}{2}$$

- **y = 3**

En efecto:

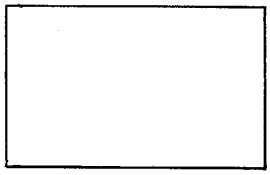
$3(2) + 2(3) = 12$
$6 + 6 = 12$
$12 = 12$ ◀ PCV

36

Si $5x - y = 14$

y $y = 6$

entonces:



$x =$ ⌊___⌋

- $5x = 14 + y$

$$x = \frac{14 + y}{5}$$

$$x = \frac{14 + 6}{5}$$

$$x = \frac{20}{5}$$

- **x = 4**

En efecto:

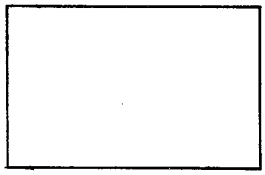
$5(4) - (6) = 14$
$20 - 6 = 14$
$14 = 14$ ◀ PCV

37

Si $7x - 4y = 11$

y $x = 3$

entonces:



$y =$ ⌊___⌋

- $-4y = 11 - 7x$

$4y = -11 + 7x$

$4y = 7x - 11$

$$y = \frac{7x - 11}{4}$$

$$y = \frac{7(3) - 11}{4}$$

$$y = \frac{21 - 11}{4}$$

$y = 10/4$

- **y = 5/2**

En efecto:

$$7(3) - 4\left(\frac{5}{2}\right) = 11$$

$21 - 10 = 11$
$11 = 11$ ◀ PCV

2.3.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

38

Regresemos al sistema que habíamos venido considerando:

$$\begin{cases} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{N}$

El par $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

satisface / **no satisface** la ecuación ② porque _____

- **satisface**
- $2, 0 \in \mathbb{N}$

y

$(2) - (0) = 2$

$2 - 0 = 2$

$2 = 2$

PCV

39

$$x - y = 2 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{N}$

El par $\begin{cases} x = 16 \\ y = 14 \end{cases}$

satisface / **no satisface** la ecuación ② porque _____

- **satisface**
- $16, 14 \in \mathbb{N}$

y

$(16) - (14) = 2$

$16 - 14 = 2$

$2 = 2$

PCV

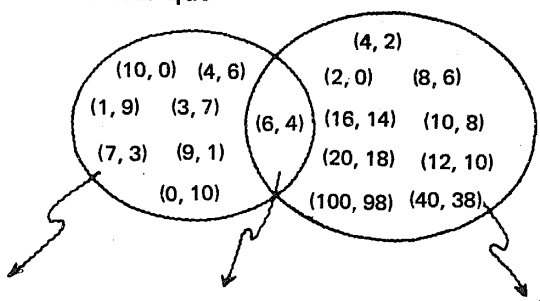
40

Convencionalmente
simbolizaremos así → (x, y)

un par de sustitutos permisibles
para una ecuación de dos variables.

41

Podemos observar que



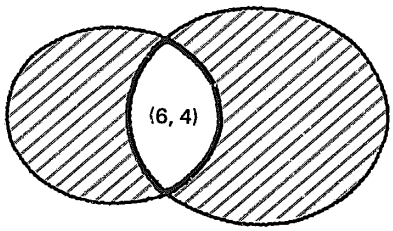
satisfacen
la ecuación
$x + y = 10$

satisface la
ecuación $x + y = 10$
y
la ecuación $x - y = 2$

satisfacen
la ecuación
$x - y = 2$

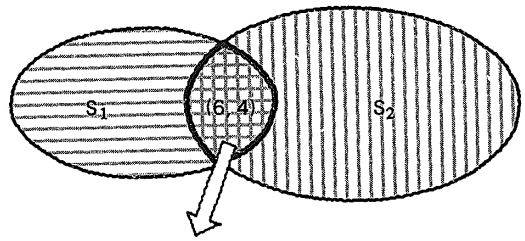
42

Observar con atención.



(6, 4) es *el único par*
que satisface la ecuación $x + y = 10$
y
la ecuación $x - y = 2$

43



S_1 $S_1 \cap S_2$ S_2

Conjunto solución de la ecuación ①

$x + y = 10$

$x, y \in \mathbb{N}$

Conjunto solución del sistema

$x + y = 10 \wedge x - y = 2$

$x, y \in \mathbb{N}$

Conjunto solución de la ecuación ②

$x - y = 2$

$x, y \in \mathbb{N}$

44

Sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (indeterminadas o variables):

$x + y = 10$ ①

$x - y = 2$ ②

$x, y \in \mathbb{N}$

$S_1 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10\}$

$S_2 =$ ⌊_____⌋

$\{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x - y = 2\}$

45

$x + y = 10$ ①

$x - y = 2$ ②

$x, y \in \mathbb{N}$

$S_1 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10\}$

$S_2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x - y = 2\}$

$S = S_1 \cap S_2 =$ ⌊_____⌋

$\{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10 \wedge x - y = 2\}$

46

Estudiar con atención.

$$\begin{array}{|ll|} \hline x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \\ \hline \end{array}$$

$x, y \in \mathbb{N}$

Conjunto solución de la ecuación ① :

$$S_1 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10\}$$

Conjunto solución de la ecuación ② :

$$S_2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x - y = 2\}$$

Conjunto solución del sistema:

$$S = S_1 \cap S_2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10 \wedge x - y = 2\}$$

2.3.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* en una ecuación dada con dos variables, el sustituto satisfactor para una de ellas, a partir de un sustituto dado para la otra.

3.3

Método de reducción

47

Existen varios métodos para determinar el

conjunto solución

de un sistema de ecuaciones.

48

El punto de partida para la solución es la

eliminación de una de las incógnitas.

49

Estudiaremos

tres métodos

para la eliminación de una de las incógnitas:

1. Método de **reducción**
2. Método de **igualación**
3. Método de **sustitución**

50

1. Método de reducción

51

Se requiere resolver nuestro ya conocido sistema:

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

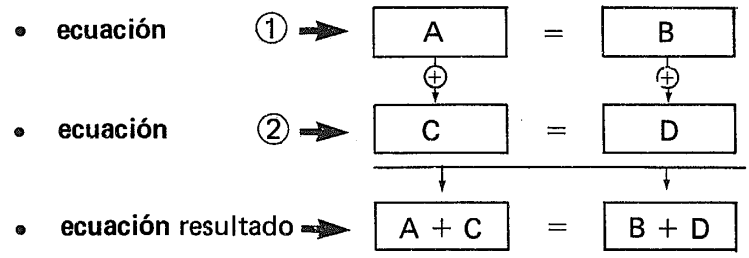
$x, y \in \mathbb{N}$

52

Definiremos una operación que llamaremos

suma miembro a miembro

de dos ecuaciones:



53

Si

$A = B$

y

$C = D$

entonces

$A + C = B + D$ ← ecuación suma miembro a miembro

V/F

porque

- V
- A = B

sumando C a ambos miembros (lo cual es permitido por la

propiedad aditiva)

obtenemos:

A + C = B + C

sustituyendo C = D (propiedad sustitutiva) en el segundo miembro, obtenemos:

A + C = B + D

54

Podemos definir también la

resta o sustracción miembro a miembro

de dos ecuaciones:

Si

$A = B$

y

$C = D$

entonces

$A - C = B - D$ ← ecuación diferencia miembro a miembro

55

Volvamos a nuestro problema:

$x + y = 10$ ①

$x - y = 2$ ②

Sumar miembro a miembro las ecuaciones ① y ② :

Ecuación resultado:

$2x + 0 = 12$

56

$x + \cancel{y} = 10$ ①

$x - \cancel{y} = 2$ ②

$2x + 0 = 12$

Observamos que las ecuaciones ① y ② han sido transformadas en una

ecuación con una incógnita

cuya solución es

$x =$ 6

57

$x + y = 10$ ①

$x - y = 2$ ②

$2x = 12$

$x = 6$

$x, y \in \mathbb{N}$

$6 \in \mathbb{N}$

Si

$x + y = 10$

y

$x = 6$

entonces

$y =$

Si

$x - y = 2$

y

$x = 6$

entonces

$y =$

$x + y = 10$ —— ①

$x = 6$

$y = 10 - x$

$y = 10 - 6$

• $y = 4$

$x - y = 2$ —— ②

$x = 6$

$-y = 2 - x$

$y = x - 2$

$y = 6 - 2$

• $y = 4$

58

$x + y = 10$ ①

$x - y = 2$ ②

$x, y \in \mathbb{N}$

El par de sustitutos $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

es la solución del sistema, porque $6, 4 \in \mathbb{N}$

y

y

- $(6) + (4) = 10$
  $10 = 10$ ①
  PCV
- $(6) - (4) = 2$
  $2 = 2$ ②
  PCV

59

$x + y = 10$ ①

$x - y = 2$ ②

$x, y \in \mathbb{N}$

$x = 6$

$y = 4$

Conjunto solución:

_____ = _____

por comprensión por extensión

Respuesta en el cuadro siguiente

Conjunto solución:

$S = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N},\ x + y = 10 \wedge x - y = 2\}$

$S = (6, 4)$

x y

60

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-5x + 8y = 1 \quad ①$$
$$5x + 3y = 21 \quad ②$$
$$x, y \in \mathbb{N}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones ① y ②, ¿logramos **eliminar una de las incógnitas?**

Sí/No

En caso de respuesta afirmativa, ¿cuál sería la incógnita eliminable? [ ]

Sí

x

61

$$-5x + 8y = 1 \quad ①$$
$$5x + 3y = 21 \quad ②$$
$$[\quad\quad\quad]$$

ecuación suma miembro a miembro

$11y = 22$

62

$$-5x + 8y = 1 \quad ①$$
$$5x + 3y = 21 \quad ②$$
$$11y = 22$$
$$y = [\quad]$$

2

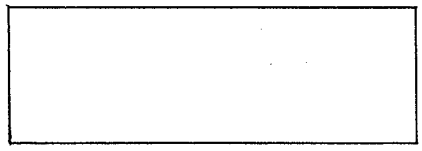
63

$$-5x + 8y = 1 \quad ①$$
$$5x + 3y = 21 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{N}$

$$11y = 22$$
$$y = 22/11$$
$$\boxed{y = 2}$$

$2 \in \mathbb{N}$



$x =$ ⌊___⌋

- De ①:

$-5x + 8(2) = 1$
$-5x + 16 = 1$
$-5x = 1 - 16$
$-5x = -15$
$x = -15/-5$
$\boxed{x = 3}$ $\quad 3 \in \mathbb{N}$

- De ②:

$5x + 3(2) = 21$
$5x + 6 = 21$
$5x = 21 - 6$
$5x = 15$
$\boxed{x = 3}$

64

$$-5x + 8y = 1 \quad ①$$
$$5x + 3y = 21 \quad ②$$

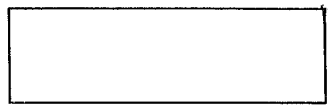
$x, y \in \mathbb{N}$

$$x = 3$$
$$y = 2$$

$3, 2 \in \mathbb{N}$

Comprobación:

y

 ①

②

- $-5(3) + 8(2) = 1$
  $-15 + 16 = 1$
  $1 = 1$ ①
  PCV

- $5(3) + 3(2) = 21$
  $15 + 6 = 21$
  $21 = 21$ ②
  PCV

65

Se requiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 3 \quad ①$$
$$x + 2y = 5 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{N}$

Si sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones, ¿logramos eliminar una de las incógnitas?

Sí/No

en caso afirmativo, ¿cuál sería la incógnita eliminable?

⌊_____⌋

No

ecuación suma miembro a miembro

$2x + 3y = 8$

66

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 3 & (1) \\ x + 2y = 5 & (2) \end{array}\right\} x, y \in \mathbb{N}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2) por (− 1) obtenemos la

ecuación equivalente:

$\boxed{}$ (2′)

$-x - 2y = -5$

67

$$\begin{array}{ll} x + y = 3 & (1) \\ x + 2y = 5 & (2) \\ -x - 2y = -5 & (2') \end{array} \quad x, y \in \mathbb{N}$$

Si sumamos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2′) ¿logramos **eliminar una de las incógnitas?**

Sí/No

En caso afirmativo, ¿cuál sería la incógnita eliminable?

$\boxed{}$

Sí

x

68

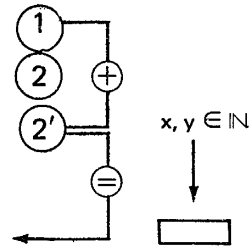
$$\begin{array}{rl} x + y = 3 & (1) \\ x + 2y = 5 & (2) \quad + \\ -x - 2y = -5 & (2') \\ \hline \boxed{} & = \end{array}$$

ecuación suma miembro a miembro (1) + (2′)

$-y = -2$

69

$$x + y = 3$$
$$x + 2y = 5$$
$$-x - 2y = -5$$
$$-y = -2$$
$$y = \square$$



Cálculo de x:

$$x = \square$$

- $y = 2$ $\quad 2 \in \mathbb{N}$
- De 1 :

  $x = 3 - y$
  $x = 3 - (2)$
  $\boxed{x = 1}$ $\quad 1 \in \mathbb{N}$

  De 2 :

  $x = 5 - 2y$
  $x = 5 - 2(2)$
  $x = 5 - 4$
  $\boxed{x = 1}$
- 1

70

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 3 & ① \\ x + 2y = 5 & ② \end{array}\right\} x, y \in \mathbb{N}$$

$x = 1$
$y = 2$

Comprobación:

①

②

- $x = 1$
  $y = 2$

  $(1) + (2) = 3$
  $3 = 3$ ①
  PCV
- $(1) + 2(2) = 5$
  $1 + 4 = 5$ ②
  $5 = 5$
  PCV

71

Se requiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x + 2y = 14 & ① \\ 2x - y = 0 & ② \end{array}\right\} x, y \in \mathbb{N}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones ① y ②, ¿logramos **eliminar una de las incógnitas?**

Sí/No

En caso afirmativo, ¿cuál sería la incógnita eliminable?

$\square$

No

ecuación suma miembro a miembro

$5x + y = 14$

72

$3x + 2y = 14$ ①

$2x - y = 0$ ②

Para eliminar la incógnita **y** debemos multiplicar la ecuación ② por 2, para obtener la **ecuación equivalente:**

[ ] ②'

$4x - 2y = 0$

73

Sumando miembro a miembro las ecuaciones ① y ②' :

$3x + 2y = 14$ ①

$2x - y = 0$ ②

$4x - 2y = 0$ ②'

[ ]

ecuación suma miembro a miembro ① + ②

$7x = 14$

74

$3x + 2y = 14$ ①

$2x - y = 0$ ② $x, y \in \mathbb{N}$

$4x - 2y = 0$ ②'

Cálculo de x:

[ ]

$x =$ [ ]

Cálculo de y:

[ ]

$y =$ [ ]

- **Cálculo de x:**

$7x = 14$

$\boxed{x = 2}$ $2 \in \mathbb{N}$

- Cálculo de y:

De ①:

$2y = 14 - 3x$

$y = \dfrac{14 - 3x}{2}$

$y = \dfrac{14 - 3(2)}{2}$

$y = \dfrac{14 - 6}{2}$

$y = 4$ $4 \in \mathbb{N}$

75

$3x + 2y = 14$ ①

$2x - y = 0$ ②

$x = 2$

$y = 4$

Comprobación:

① ____

② ____

- $3(2) + 2(4) = 14$
  $6 + 8 = 14$ ①
  $14 = 14$
  ▲ PCV
- $2(2) - (4) = 0$
  $4 - 4 = 0$ ②
  $0 = 0$
  ▲ PCV

76

Se requiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$x + 4y = 17$ ①

$5x - 3y = 16$ ② $\}$ $x, y \in \mathbb{N}$

Para eliminar la incógnita x es necesario multiplicar la ecuación ① por ____

-5

77

$x + 4y = 17$ ①

$5x - 3y = 16$ ②

$x, y \in \mathbb{N}$

1. Eliminación de x, y cálculo de y:

____

$y =$ ____

2. Cálculo de x: ____

____

$x =$ ____

1. $-5x - 20y = -85$ ①
   $5x - 3y = 16$ ②
   $-23y = -69$
   $y = -69/-23$
   - $\boxed{y = 3}$ $3 \in \mathbb{N}$
2. De ①:
   $x = 17 - 4y$
   $x = 17 - 4(3)$
   $x = 17 - 12$
   - $\boxed{x = 5}$ $5 \in \mathbb{N}$

78

$$\left.\begin{aligned} x + 4y &= 17 \quad (1)\\ 5x - 3y &= 16 \quad (2)\end{aligned}\right\} \; x, y \in \mathbb{N}$$

$x = 5$

$y = 3$

Comprobación:

[ ] (1)

[ ] (2)

- $(5) + 4(3) = 17$
  $5 + 12 = 17$
  $17 = 17$ ↑ PCV } (1)

- $5(5) - 3(3) = 16$
  $25 - 9 = 16$
  $16 = 16$ ↑ PCV } (2)

79

¡Atención!

Se requiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 7y &= 16 \quad (1)\\ 2x - 5y &= 1 \quad (2)\end{aligned}\right\} \; x, y \in \mathbb{N}$$

Para eliminar la incógnita x

es necesario [ ]

multiplicar la ecuación (1) por 2,
y la ecuación (2) por − 3,
o bien, multiplicar la ecuación (1) por − 2
y la ecuación (2) por 3.

80

$3x + 7y = 16$ (1)

$2x - 5y = 1$ (2)

Similarmente,
para eliminar la incógnita y
se requiere [ ]

multiplicar la ecuación (1) por 5,
y la ecuación (2) por 7

81

$3x + 7y = 16$ ①

$2x - 5y = 1$ ②

Decidimos eliminar
x, por lo tanto:

multiplicamos la ecuación ① por 2
y obtenemos la ecuación equivalente:

[ ] ①'

multiplicamos la ecuación ② por -3
y obtenemos la ecuación equivalente:

[ ] ②'

$6x + 14y = 32$

$-6x + 15y = -3$

82

$3x + 7y = 16$ ①

$2x - 5y = 1$ ② } $x, y \in \mathbb{N}$

$6x + 14y = 32$ ①'

$-6x + 15y = -3$ ②'

1. [ ]

$y =$ [ ]

2. [ ]

$x =$ [ ]

1. $6x + 14y = 32$ ①'

$-6x + 15y = -3$ ②'

$29y = 29$

• $\boxed{y = 1}$ $1 \in \mathbb{N}$

2. De ①:

$3x = 16 - 7y$

$x = \dfrac{16 - 7y}{3}$

$x = \dfrac{16 - 7(1)}{3}$

$x = \dfrac{16 - 7}{3}$

• $\boxed{x = 3}$ $3 \in \mathbb{N}$

83

$3x + 7y = 16$ ①

$2x - 5y = 1$ ② } $x, y \in \mathbb{N}$

$x = 3$

$y = 1$

Comprobación

[ ] ①

[ ] ②

• $3(3) + 7(1) = 16$

$9 + 7 = 16$ } ①

$16 = 16$

PCV

• $2(3) - 5(1) = 1$

$6 - 5 = 1$ } ②

$1 = 1$

PCV

84

En el sistema

$$5x - y = 5 \quad ①$$
$$-2x + 3y = 9 \quad ②$$

Para eliminar x
se requiere
multiplicar la ecuación ① por ____

y multiplicar la ecuación ② por ____

Para eliminar y se requiere
multiplicar la ecuación ① por ____

y multiplicar la ecuación ② por ____

2

5

3

1

85

En el sistema

$$4x - 3y = 17 \quad ①$$
$$7x + 2y = 66 \quad ②$$

Para eliminar x se requiere
multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

Para eliminar y se requiere
multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

7 — 7
o bien
— 4 4

2

3

86

En el sistema

$$12x - 5y = 0 \quad ①$$
$$6x + 2y = 54 \quad ②$$

Para eliminar x se requiere
multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

Para eliminar y se requiere
multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

6 — 6 1
o bien: o mejor:
— 12 12 — 2

2

5

87

En el sistema

$$-3x + 4y = 8 \qquad ①$$
$$5x - 2y = -4 \qquad ②$$

Para eliminar x se requiere multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

Para eliminar y se requiere multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

5

3

2 y 1

o mejor:

4 y 2

88

En el sistema

$$x + y = 10 \qquad ①$$
$$x - y = 2 \qquad ②$$

Para eliminar x se requiere multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

Para eliminar y se requiere multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

1 y -1

o bien:

-1 y 1

1

1

89

En general, en el sistema

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad ①$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad ②$$

Para eliminar x se requiere multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

Para eliminar y se requiere multiplicar la ecuación ① por ____

y la ecuación ② por ____

a_2 y $-a_2$

o bien:

$-a_1$ y a_1

b_2 y $-b_2$

o bien:

$-b_1$ y b_1

2.3.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

90

Resolver por el **método de reducción:**

$$\left.\begin{array}{ll} 10x - 3y = 36 & ① \\ 2x + 5y = -4 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

1. Eliminación de x y cálculo de y:

$y =$ ____

2. Cálculo de x:

$x =$ ____

1. $20x - 6y = 72$ (1′)
   $-20x - 50y = 40$ (2′)
   $-56y = 112$
   $y = 112/-56$
   • $\boxed{y = -2}$ $\quad -2 \in \mathbb{Z}$
2. De (1):
   $10x = 36 + 3y$
   $x = \dfrac{36 + 3y}{10}$
   $x = \dfrac{36 + 3(-2)}{10}$
   $x = \dfrac{36 - 6}{10}$
   • $\boxed{x = 3}$ $\quad 3 \in \mathbb{Z}$

91

$$\left.\begin{array}{ll} 10x - 3y = 36 & ① \\ 2x + 5y = -4 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

$x = 3$
$y = -2$

Comprobación:

① ____

② ____

• $10(3) - 3(-2) = 36$
  $30 + 6 = 36$
  $36 = 36$ } ①
  PCV

• $2(3) + 5(-2) = -4$
  $6 - 10 = -4$
  $-4 = -4$ } ②
  PCV

92

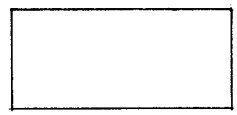
Resolver por el método de reducción:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x - 5y = 7 & ① \\ -4x + 3y = -2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

1. Eliminación de x y cálculo de y:

$y = \square$

2. Cálculo de x:



$x = \square$

1. $12x - 20y = 28$ ①'
$-12x + 9y = -6$
$-11y = 22$
$y = 22/-11$
• $\boxed{y = -2}$ $-2 \in \mathbb{Z}$

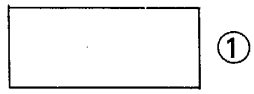
2. De ①:
$3x = 7 + 5y$
$x = \dfrac{7 + 5y}{3}$
$x = \dfrac{7 + 5(-2)}{3}$
$x = \dfrac{7 - 10}{3}$
• $\boxed{x = -1}$ $-1 \in \mathbb{Z}$

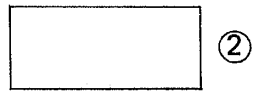
93

$$\left.\begin{array}{rl} 3x - 5y = 7 & ① \\ -4x + 3y = -2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$x = -1$
$y = -2$

Comprobación:

 ①

 ②

• $3(-1) - 5(-2) = 7$
$-3 + 10 = 7$
$7 = 7$ ①
PCV

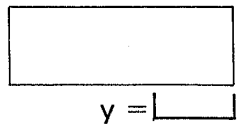
• $-4(-1) + 3(-2) = -2$
$4 - 6 = -2$
$-2 = -2$ ②
PCV

94

Resolver por el método de reducción:

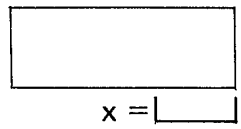
$$\left.\begin{array}{rl} 3x + 4y = 3 & ① \\ 6x + 12y = 7 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

1. Eliminación de x y cálculo de y:



$y = \square$

2. Cálculo de x:



$x = \square$

1. $6x + 8y = 6$
$-6x - 12y = -7$
$-4y = -1$
• $\boxed{y = 1/4}$ $1/4 \notin \mathbb{Z}$

2. De ①:
$3x = 3 - 4y$
$x = \dfrac{3 - 4y}{3}$
$x = \dfrac{3 - 4(1/4)}{3}$
$x = \dfrac{3 - 1}{3}$
• $\boxed{x = 2/3}$ $2/3 \notin \mathbb{Z}$

95

$$\left.\begin{array}{ll} 3x + 4y = 3 & ① \\ 6x + 12y = 7 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

Conjunto solución:

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

por comprensión — por extensión

$S = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{Z},$
$3x + 4y = 3 \wedge 6x + 12y = 7\} = \phi$

2.3.3.2

Práctica adicional de resolución de sistemas de la forma

$a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$,

si se considera necesario.

2.3.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* un sistema dado, de la forma:

  $a_1 x + b_1 y = c_1 \wedge a_2 x + b_2 y = c_2$

  con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$,
  por el método de reducción.

3.4

Método de igualación

96

El segundo método que estudiaremos para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se denomina:

2. Método de igualación

97

Se requiere resolver nuestro conocido sistema por el **método de igualación.**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 10 \quad (1) \\ x - y &= 2 \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Procedimiento:

1. De la ecuación (1) **despejar** x

   ______________ (1')

$x = 10 - y$

98

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

$x = 10 - y$ ①'

2. De la ecuación ② despejar x:

[ ] ②'

$x = 2 + y$

99

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

$x = 10 - y$ ①'
$x = 2 + y$ ②'

3. Haciendo uso de la **propiedad transitiva,**

igualar

las dos expresiones equivalentes a la incógnita despejada:

[ ] ③

$10 - y = 2 + y$

100

$x + y = 10$ ①
$x - y = 2$ ②

$x = 10 - y$ ①'
$x = 2 + y$ ②'
$10 - y = 2 + y$ ③

4. Mediante este proceso, hemos logrado eliminar la incógnita x, reduciéndose el problema a resolver la ecuación ③ con una incógnita:

[ ]

$y =$ [ ]

$-y - y = 2 - 10$
$-2y = -8$
$y = -8/-2$
$y = 4 \qquad 4 \in$

101

Estudiar con atención.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \quad ① \\ x - y = 2 \quad ② \end{array}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $x = 10 - y$ ①'

De ②: $x = 2 + y$ ②'

$10 - y = 2 + y$ ③

$-y - y = 2 - 10$

$-2y = -8$

$y = -8/-2$

$\boxed{y = 4}$ $\qquad 4 \in \mathbb{Z}$

102

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \quad ① \\ x - y = 2 \quad ② \end{array}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $x = 10 - y$ ①'

De ②: $x = 2 + y$ ②'

$10 - y = 2 + y$ ③

$y = 4$ $\qquad x, y \in \mathbb{Z}$

5. Determinar la otra incógnita (x), de cualquiera de las ecuaciones ①' o' ②' , sustituyendo el valor de y

$x =$ ☐

De ①':

$x = 10 - 4$

$x = 6$

103

Estudiar con atención el procedimiento completo.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \quad ① \\ x - y = 2 \quad ② \end{array}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $x = 10 - y$ ①'

De ②: $x = 2 + y$ ②'

$10 - y = 2 + y$ ③

$y = 4$ $\qquad 4 \in \mathbb{Z}$

De ①': $x = 10 - 4$

$x = 6$ $\qquad 6 \in \mathbb{Z}$

104

Procedimiento alternativo,
eliminando la incógnita y:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $y =$ ____ ①'

De ②: $y =$ ____ ②'

Igualando los segundos miembros de ①' y ②'

____ ③

$x =$ ____

De ①' ____

$y =$ ____

Respuesta en el cuadro siguiente

Procedimiento alternativo,
eliminando la incógnita y:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $y = 10 - x$ ①'

De ②: $y = -2 + x$ ②'

$10 - x = -2 + x$ ③

$-x - x = -2 - 10$

$-2x = -12$

$x = -12/-2$

$\boxed{x = 6}$ $\quad 6 \in \mathbb{Z}$

De ①': $y = 10 - 6$

$\boxed{y = 4}$ $\quad 4 \in \mathbb{Z}$

105

Resolver por el método de igualación,

eliminando x:

$$\left.\begin{array}{rl} x + 6y = 27 & ① \\ 7x - 3y = 9 & ② \end{array}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: ____ ①'

$x = 27 - 6y$

De ②: ____ ②'

$x = \dfrac{9 + 3y}{7}$

106

$$x + 6y = 27 \quad ①$$
$$7x - 3y = 9 \quad ②$$

De ①: $x = 27 - 6y$ ①'

De ②: $x = \dfrac{9 + 3y}{7}$ ②'

Igualar los segundos miembros de ①' y ②' :

$$27 - 6y = \frac{9 + 3y}{7}$$ ③

107

$$x + 6y = 27 \quad ①$$
$$7x - 3y = 9 \quad ②$$

De ①: $x = 27 - 6y$ ①'

De ②: $x = \dfrac{9 + 3y}{7}$ ②'

$$27 - 6y = \frac{9 + 3y}{7}$$ ③

Resolver la ecuación ③ :

$$27 - 6y = \frac{9+3y}{7}$$

$$7(27 - 6y) = 9 + 3y$$

$$189 - 42y = 9 + 3y$$

$$-42y - 3y = 9 - 189$$

$$-45y = -180$$

$$y = \frac{-180}{-45}$$

$\circ$ $\boxed{y = 4}$ $\quad 4 \in \mathbb{Z}$

y = ⌊___⌋

108

$$x + 6y = 27 \quad ①$$
$$7x - 3y = 9 \quad ②$$

De ①: $x = 27 - 6y$ ①'

De ②: $x = \dfrac{9+3y}{7}$ ②'

$$27 - 6y = \frac{9+3y}{7}$$ ③

$y = 4$

Calcular x, por sustitución en 1' :

$x = 27 - 6y$

$x = 27 - 6(4)$

$x = 27 - 24$

$x = 3 \qquad 3 \in \mathbb{Z}$

x = ⌊___⌋

109

$$\left.\begin{aligned} x + 6y &= 27 \quad ① \\ 7x - 3y &= 9 \quad ② \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $x = 27 - 6y$ ①'

De ②' $x = \dfrac{9 + 3y}{7}$ ②'

$27 - 6y = \dfrac{9 + 3y}{7}$ ③

$\boxed{y = 4}$ $\quad 4 \in \mathbb{Z}$

$x = 27 - 6(4)$

$x = 27 - 24$

$\boxed{x = 3}$ $\quad 3 \in \mathbb{Z}$

110

$$\left.\begin{aligned} x + 6y &= 27 \quad ① \\ 7x - 3y &= 9 \quad ② \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$x = 3$

$y = 4$

Comprobación

① ☐

② ☐

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\begin{aligned} x + 6y &= 27 \quad ① \\ 7x - 3y &= 9 \quad ② \end{aligned}$$

$x = 3$
$y = 4$

Comprobación:

① $(3) + 6(4) = 27$
$3 + 24 = 27$
$27 = 27$ (PCV)

② $7(3) - 3(4) = 9$
$21 - 12 = 9$
$9 = 9$ (PCV)

2.3.4.1

Práctica adicional de
resolución de sistemas de la forma

$a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$
por el método de igualación,

si se considera necesario.

2.3.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* un sistema dado, de la forma:

  $a_1 x + b_1 y = c_1 \wedge a_2 x + b_2 y = c_2$

  con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, por el método de igualación; comprobar los resultados y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

3.5

Método de sustitución

111

Estudiaremos, a continuación, un tercer método para la resolución de sistemas de ecuaciones:

3. **Método de sustitución.**

112

Se requiere resolver nuestro familiar sistema

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

por el **método de sustitución.**

1. De una cualquiera de las ecuaciones, **por ejemplo de la** ①, **despejar** una cualquiera de la incógnitas,

por ejemplo x: $\square$ ①'

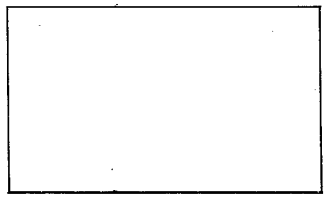
$x = 10 - y$

113

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

$x = 10 - y$ ①'

2. Sustituir la expresión equivalente a la incógnita despejada, en la otra ecuación.
En nuestro caso: sustituir ①' en la ecuación ② :



③

$(10 - y) - y = 2$

114

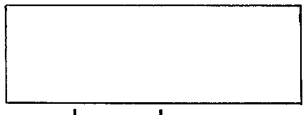
$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

De ① : $x = 10 - y$ ①'

$(10 - y) - y = 2$ ③

Por este procedimiento hemos logrado eliminar la incógnita x, reduciéndose el problema a resolver la ecuación ③ con una incógnita.

3. Resolver la ecuación ③ :



$y =$ ⌊____⌋

$10 - y - y = 2$

$-2y = 2 - 10$

$-2y = -8$

$y = -8/-2$

• $\boxed{y = 4}$ $4 \in \mathbb{Z}$

115

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

De ① : $x = 10 - y$ ①'

$(10 - y) - y = 2$ ③

$10 - y - y = 2$

$-2y = 2 - 10$

$-2y = -8$

$y = -8/-2$

$\boxed{y = 4}$ $4 \in \mathbb{Z}$

4. Calcular la otra incógnita, en nuestro caso:
de ①' : $x =$ ⌊____⌋

De ①'

$x = 10 - 4$

• $x = 6$ $6 \in \mathbb{Z}$

116

Estudiar con atención.

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $x = 10 - y$ ①

$(10 - y) - y = 2$ ③

$\boxed{y = 4}$ $\quad 4 \in \mathbb{Z}$

De ①' $x = 10 - 4$

$\boxed{x = 6}$ $\quad 6 \in \mathbb{Z}$

117

Procedimiento alternativo, eliminando y:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: ⌊_____⌋ ①'

Sustitución
de ①' en ②: ⌊_____⌋ ③

$x =$ ⌊___⌋ $\quad$ □

De ①': ⌊_____⌋

$y =$ ⌊___⌋ $\quad$ □

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Procedimiento alternativo, eliminando y :

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ①: $y = 10 - x$ ①'

$x - (10 - x) = 2$ ③

$x - 10 + x = 2$

$2x = 2 + 10$

$2x = 12$

$\boxed{x = 6}$ $\quad 6 \in \mathbb{Z}$

De ①': $y = 10 - 6$

$\boxed{y = 4}$ $\quad 4 \in \mathbb{Z}$

118 **Procedimiento alternativo**

eliminando x a partir de su despeje en la ecuación ② :

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

De ② : $x = 2 + y$ ②'

sustituyendo ②' en ① : $(2 + y) + y = 10$ ③

$2 + 2y = 10$

$2y = 10 - 2$

$y = 8/2$

$\boxed{y = 4}$ $4 \in \mathbb{Z}$

De ②' : $x = 2 + 4$

$\boxed{x = 6}$ $6 \in \mathbb{Z}$

119 **Procedimiento alternativo**

eliminando y a partir de su despeje en la ecuación ② :

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 10 & ① \\ x - y = 2 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 10 \quad ① \\ x - y &= 2 \quad ② \end{aligned}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

De ② :

$$-y = 2 - x$$

$$y = x - 2 \quad ②'$$

sustituyendo ② en ① $\quad x + (x - 2) = 10 \quad ③$

$$2x = 10 + 2 = 12$$

$$x = 12/2$$

$$\boxed{x = 6} \qquad 6 \in \mathbb{Z}$$

De ②' :

$$y = 6 - 2$$

$$\boxed{y = 4} \qquad 4 \in \mathbb{Z}$$

120

Resolver por el **método de sustitución,** este sistema que hemos resuelto **por reducción,** y cuya solución es

$$x = 1$$
$$y = 2$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \quad ① \\ x + 2y &= 5 \quad ② \end{aligned}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

Una de las posibles rutas para la solución:

De ① :

$$x = 3 - y \quad ①'$$

sustituyendo ①' en ② :

$$(3 - y) + 2y = 5 \quad ③$$

$$3 - y + 2y = 5$$

$$3 + y = 5$$

$$y = 5 - 3$$

$$\boxed{y = 2} \qquad 2 \in \mathbb{Z}$$

De ①' :

$$x = 3 - 2$$

$$\boxed{x = 1} \qquad 1 \in \mathbb{Z}$$

121

Resolver por el **método de sustitución:**

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 4 \quad ① \\ 3x + 3y &= 15 \quad ② \end{aligned}\right\} \; x, y \in \mathbb{Z}$$

De ① : $\quad 5x = 4 + 2y$

$$x = \frac{4 + 2y}{5} \quad ①'$$

sustituyendo ①' en ② :

$$3\left(\frac{4 + 2y}{5}\right) + 3y = 15$$

$$\frac{12 + 6y}{5} + 3y = 15$$

$$\frac{12 + 6y + 15y}{5} = 15$$

$$12 + 21y = 15 \times 5 = 75$$

$$21y = 75 - 12 = 63$$

$$y = 63/21$$

$$\boxed{y = 3}$$

De ①' : $\quad x = \dfrac{4 + 2(3)}{5}$

$$\boxed{x = 2}$$

122

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 4 \quad ① \\ 3x + 3y &= 15 \quad ② \end{aligned}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

$x = 2$

$y = 3$

Comprobación:

①

②

- $5(2) - 2(3) = 4$
  $10 - 6 = 4$ } ①
  $4 = 4$
  PCV

- $3(2) + 3(3) = 15$
  $6 + 9 = 15$ } ②
  $15 = 15$
  PCV

123

Resolver por el **método de sustitución:**

$$\left.\begin{aligned} 10x - 7y &= 5 \quad ① \\ 5x - 3y &= 5 \quad ② \end{aligned}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

De ① :

$$-7y = 5 - 10x$$

$$7y = 10x - 5$$

$$y = \frac{10x - 5}{7} \quad ①' \quad y \in \mathbb{Z}$$

sustituyendo ①' en ②

$$5x - 3\left(\frac{10x - 5}{7}\right) = 5$$

$$5x + \frac{-30x + 15}{7} = 5$$

$$\frac{35x - 30x + 15}{7} = 5$$

$$5x + 15 = 35$$

$$5x = 20$$

$$\boxed{x = 4} \qquad 4 \in \mathbb{Z}$$

De ①' :

$$y = \frac{10(4) - 5}{7}$$

$$y = \frac{40 - 5}{7}$$

$$\boxed{y = 5} \qquad 5 \in \mathbb{Z}$$

5

2.3.5.1

Práctica adicional de
resolución de sistemas
de ecuaciones de la forma

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$
por el método de sustitución,

si se considera necesario.

124

Resolver por cualquiera de los métodos estudiados, comprobar los resultados y escribir el conjunto solución en la forma: $S = \{(x, y)\}$ Para todas las ecuaciones: $x, y \in \mathbb{Z}$

1. $x + y = 13$
   $x - y = 1$

2. $x + y = 18$
   $2x + y = 28$

3. $x - y = -9$
   $x + y = -3$

4. $-2x - 4y = -16$
   $-3x + 2y = 16$

5. $x + 4y = 5$
   $-x - y = 1$

6. $6x - 10y = -2$
   $3x + 5y = 5$

7. $3x - 4y = 0$
   $5x + 3y = 29$

8. $-10x - 3y = -53$
   $30x + y = 151$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

1. $x = 7$, $y = 6$ $S = \{(7, 6)\}$
2. $x = 10$, $y = 8$ $S = \{(10, 8)\}$
3. $x = -6$, $y = 3$ $S = \{(-6, 3)\}$
4. $x = -2$, $y = 5$ $S = \{(-2, 5)\}$
5. $x = -3$, $y = 2$ $S = \{(-3, 2)\}$
6. $(x = 2/3)$, $(y = 3/5)$ $S = \phi$
7. $x = 4$, $y = 3$ $S = \{(4, 3)\}$
8. $x = 5$, $y = 1$ $S = \{(5, 1)\}$

2.3.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* sistemas de ecuaciones de la forma:

  $a_1 x + b_1 y = c_1 \ \wedge \ a_2 x + b_2 y = c_2$

  con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$

  por el metodo de sustitución; comprobar los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

3.6

Tres clases de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

125

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

Estado inicial:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x + 5y = 21 & ① \\ 6x + 10y = 42 & ② \end{array}\right\} x, y \in \mathbb{Q}$$

Transformaciones:

$x =$ ⌊____⌋

Estado final:

$y =$ ⌊____⌋

Cualquier intento de resolución nos conduce a una

proposición cerrada verdadera

126

$$\begin{array}{rl} 3x + 5y = 21 & ① \\ 6x + 10y = 42 & ② \end{array}$$

Observemos que las ecuaciones ① y ② son **equivalentes;**

la primera puede ser transformada en la segunda **multiplicando** ambos miembros por 2.

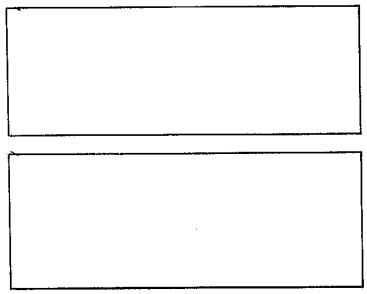
Ambas ecuaciones tienen

el mismo conjunto solución.

127

El par de sustitutos $\begin{cases} x = 0 \\ y = \square \end{cases}$ satisface las ecuaciones $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \ ① \\ 6x + 10y = 42 \ ② \end{cases}$

porque:



①

②

$3x + 5y = 21$ ①

$6x + 10y = 42$ ②

$x, y \in \mathbb{Q}$

De ①: $y = \frac{21 - 3x}{5}$

para $x = 0$

- $y = \frac{21}{5}$

$3 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{21}{5} = 21$

PCV ▶ $21 = 21$ } ①

$6 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{21}{5} = 42$

PCV ▶ $42 = 42$ } ②

128

Hay

un infinito número de pares

que satisfacen las dos ecuaciones.

129

A un sistema de ecuaciones como éste

$3x + 5y = 21$ ①

$6x + 10y = 42$ ②

en que las dos **ecuaciones** son **equivalentes** (todo intento de resolución nos conduce a una **proposición cerrada verdadera**) le llamaremos

sistema indeterminado,

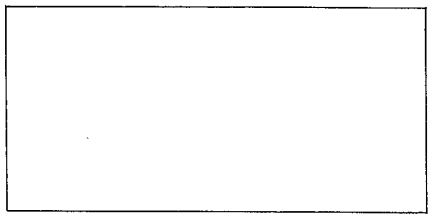
su conjunto solución tiene un número infinito

de elementos (pares de satisfactores).

130

Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 4x - 3y = 5 & ① \\ 4x - 3y = 8 & ② \end{array}\right\} x, y \in \mathbb{Q}$$



$x =$ ____

$y =$ ____

Cualquier intento de resolución nos conduce a una

proposición cerrada falsa

131

Lo anterior significa que **no** existe ningún par de sustitutos que satisfaga las dos ecuaciones

$$4x - 3y = 5$$

y

$$4x - 3y = 8$$

132

A un sistema como éste

$$4x - 3y = 5$$

$$4x - 3y = 8$$

para el que, cualquier intento de resolución nos conduce a una

proposición cerrada falsa

le llamaremos

sistema incompatible.

Su conjunto solución carece de elementos: $S = \phi$.

133

Podemos identificar un
sistema incompatible
transformándolo en su equivalente de la forma

$$y = a_1 x + b_1 \quad *$$
$$y = a_2 x + b_2$$

y

si $a_1 = a_2$
y $b_1 \neq b_2$

entonces
el sistema es incompatible

* a_1, a_2, b_1, b_2, en su forma irreductible, si son fraccionarios.

134

Probemos el sistema

$$4x - 3y = 5 \quad ①$$
$$4x - 3y = 8 \quad ②$$

para **incompatibilidad**.

Sistema equivalente:

$y =$ [ ] ①'

$y =$ [ ] ②'

De ①:

$$-3y = -4x + 5$$
$$y = \frac{-4x}{-3} + \frac{5}{-3}$$

• $\boxed{y = \frac{4x}{3} - \frac{5}{3}}$ ①'

De ②:

$$-3y = -4x + 8$$
$$y = \frac{-4x}{-3} + \frac{8}{-3}$$

• $\boxed{y = \frac{4x}{3} - \frac{8}{3}}$ ②'

135

Señalar la opción correcta y completar.

$$\boxed{\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 4x - 3y &= 8 \end{aligned}} \quad \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

↓

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \\ y &= \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \end{aligned}} \quad \begin{matrix} ①' \\ ②' \end{matrix}$$

El sistema [es/no es] incompatible,
porque [ ]

• es

• en el sistema equivalente:

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

y

$$-\frac{5}{3} \neq -\frac{8}{3}$$

136

Señalar la opción correcta y completar.

El sistema

$3x + 4y = 8$ ①

$6x + 8y = 12$ ②

[es/no es] incompatible,

porque [ ]

- es
- en el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 2 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$-\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$

y

$2 \neq \frac{3}{2}$

137

Señalar la opción correcta y completar.

El sistema

$3x - y = -2$ ①

$9x - 3y = 3$ ②

[es/no es] incompatible,

porque [ ]

- es
- en el sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$3 = 3$

$2 \neq -1$

138

Señalar la opción correcta y completar.

El sistema

$3x - y = 5$ ①

$2x - y = 6$ ②

[es/no es] incompatible,

porque [ ]

- no es
- en el sistema equivalente

$y = 3x - 5$

$y = 2x - 6$

$3 \neq 2$

139

Señalar la opción correcta y completar la respuesta:

El sistema

$$5x + 4y = 7 \qquad ①$$

$$10x + 8y = 14 \qquad ②$$

[es/no es] incompatible,

porque [ ]

- no es
- en el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4} \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$-\frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

140

Atención.

Si en el sistema equivalente:

$$y = a_1 x + b_1 \qquad ①$$

$$y = a_2 x + b_2 \qquad ②$$

resulta que

$$a_1 = a_2$$

y

$$b_1 = b_2$$

las dos ecuaciones ① y ② son equivalentes
y el sistema es [ ]

indeterminado

141

A un sistema como éste

$$3x - y = 5 \qquad ①$$

$$2x - y = 6 \qquad ②$$

que no es incompatible ni indeterminado le llamamos

sistema compatible

142

En un sistema **compatible,** escrito en la forma

$$y = a_1 x + b_1$$

$$y = a_2 x + b_2$$

se verifica que

$$a_1 \neq a_2$$

143

En síntesis, en el sistema equivalente →

$$y = a_1 x + b_1 \quad ①$$
$$y = a_2 x + b_2 \quad ②$$

si $a_1 \neq a_2$	si $a_1 = a_2$ $b_1 = b_2$	si $a_1 = a_2$ $b_1 \neq b_2$
el sistema es **compatible**	el sistema es **indeterminado**	el sistema es **incompatible**
hay **una** solución	hay un **número infinito** de soluciones	**no hay** solución

144

$$\left.\begin{array}{ll} 7x + 5y = 8 & ① \\ 3x - 2y = 5 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

Este sistema es [ ]

Conjunto solución:

[ ] = [ ]

por comprensión — por extensión

- compatible
- $S = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{Q},$ $7x + 5y = 8 \wedge 3x - 2y = 5\}$ $= \{(41/29, -11/29)\}$

145

$$\left.\begin{array}{ll} -3x + 8y = 10 & ① \\ -5x - y = 2 & ② \end{array}\right\}$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

Ese sistema es [_____]

Conjunto solución:

[_____] = [_____]

por comprensión por extensión

- compatible
- $S = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{Q}, -3x + 8y = 10 \wedge -5x - y = 2\} = \left\{-\frac{26}{43}, \frac{44}{43}\right\}$

146

$$\left.\begin{array}{ll} 35x + 40y = 75 & ① \\ 27x - 14y = 30 & ② \end{array}\right\}$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

Este es un sistema [_____]

Conjunto solución:

[_____] = [_____]

por comprensión por extensión

- compatible
- $S = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{Q}, 35x + 40y = 75 \wedge 27x - 14y = 30\} = \left\{\frac{225}{157}, \frac{195}{314}\right\}$

147

$$\left.\begin{array}{ll} 10x - 8y = 12 & ① \\ 15x - 12y = 18 & ② \end{array}\right\}$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

Este es un sistema [_____]

Conjunto solución:

[_____] = [_____]

por comprensión por extensión

- Indeterminado
- $S = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{Q}, 10x - 8y = 12 \wedge 15x - 12y = 18\}$

148

$$\left.\begin{array}{rl} 7x - 9y = 14 & ① \\ 21x - 27y = 20 & ② \end{array}\right\}$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

Es un sistema [_____]

conjunto solución:

[_____] = [_____]

por comprensión: por extensión:

- incompatible
- $S = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{Q}, 7x - 9y = 14 \wedge 21x - 27y = 20\}$

$= \phi$

149

$$\left.\begin{array}{rl} 5x + 4y = 7 & ① \\ 15x + 12y = [\quad] & ② \end{array}\right\}$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

Es un sistema **indeterminado.**

21

2.3.6.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

2.3.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* si un sistema dado de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la forma

  $$a_1 x + b_1 y = c_1 \wedge a_2 x + b_2 y = c_2$$

  con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$
  es: compatible, indeterminado o incompatible.

3.7

Sistemas con coeficientes en $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

150

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y = \frac{2}{3} \quad ① \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = \frac{5}{4} \quad ② \end{array}\right\}$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

$x =$ ⌊ ⌋ $y =$ ⌊ ⌋ ⌊ ⌋

Respuesta en los cuadros siguientes

151

Respuesta 1

Por el método de reducción

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y = \frac{2}{3} \qquad ①$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = \frac{5}{4} \qquad ②$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

1. Multiplicar ① por $\frac{2}{3}$ y ② por $-\frac{3}{4}$:

CONTINÚA ↓

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{15}y = \frac{4}{9} \quad ①'$$

$$-\frac{1}{2}x - \frac{9}{20}y = \frac{-15}{16} \quad ②'$$

2. Sumar miembro a miembro ① y ② :

$$-\frac{7}{12}y = -\frac{71}{144} \quad ③$$

3. Resolver la ecuación ③ :

$$\boxed{y = \frac{71}{84}} \qquad \frac{71}{84} \in \mathbb{Q}$$

4. Calcular x de ① :

$$\frac{3}{4}x = \frac{2}{3} + \frac{1}{5}y$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{71}{84}$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{2}{3} + \frac{71}{420}$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{117}{140}$$

$$\boxed{x = \frac{39}{35}} \qquad \frac{39}{35} \in \mathbb{Q}$$

$$\boxed{y = \frac{71}{84}}$$

5. Comprobar en la ecuación ① :

$$\frac{3}{4}\left(\frac{39}{35}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{71}{84}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{117}{140} - \frac{71}{420} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{351 - 71}{420} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{280}{420} = \frac{2}{3}$$

$$280 \times 3 = 420 \times 2$$

$$840 = 840 \leftarrow \text{PCV}$$

CONTINÚA

153

6. Comprobar en la ecuación ② :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{39}{35}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{71}{84}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\frac{78}{105} + \frac{213}{420} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{312 + 213}{420} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{525}{420} = \frac{5}{4}$$

$$525 \times 4 = 420 \times 5$$

$$2100 = 2100 \blacktriangleleft \text{ PCV}$$

7. Escribir el conjunto solución:

$$S = \left\{ (x, y)/x, y \in \mathbb{Q}, \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y = \frac{2}{3} \wedge \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = \frac{5}{4} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{39}{35}, \frac{71}{84} \right) \right\}$$

154

Estudiar con atención.

Respuesta 2

Por el método de igualación, eliminando x.

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y = \frac{2}{3} \qquad ①$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = \frac{5}{4} \qquad ②$$

$$x, y \in \mathbb{Q}$$

CONTINÚA ↓

155

1. Despejar x de ① :

$$\frac{3}{4}x = \frac{2}{3} + \frac{1}{5}y$$

$$x = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}y$$

$$x = \frac{8}{9} + \frac{4}{15}y \qquad ①$$

2. Despejar x de ② :

$$\frac{2}{3}x = \frac{5}{4} - \frac{3}{5}y$$

$$x = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}y = \frac{15}{8} - \frac{9}{10}y \qquad ②$$

3. Igualar las dos expresiones equivalentes a x:

$$\frac{8}{9} + \frac{4}{15}y = \frac{15}{8} - \frac{9}{10}y \qquad ③$$

4. Resolver la ecuación ③ :

$$\frac{4}{15}y + \frac{9}{10}y = \frac{15}{8} - \frac{8}{9}$$

$$\frac{8y + 27y}{30} = \frac{135 - 64}{72}$$

$$\frac{35}{30}y = \frac{71}{72}$$

$$y = \frac{71 \times 30}{72 \times 35}$$

$$y = \frac{2130}{2520} = \frac{213}{252} = \frac{71}{84}$$

$$y = \boxed{\frac{71}{84}} \quad ☑$$

CONTINÚA ↓

156

5. Calcular x de ① :

$$x = \frac{8}{9} + \frac{4}{15}\left(\frac{71}{84}\right)$$

$$x = \frac{8}{9} + \frac{284}{1260}$$

$$x = \frac{1120 + 284}{1260}$$

$$x = \frac{1404}{1260} = \frac{702}{630} = \frac{351}{315} = \frac{117}{105} = \frac{39}{35}$$

$$\boxed{x = \frac{39}{35}}$$ ☑

157

Estudiar con atención.

Respuesta 3

Por el método de sustitución,
eliminando x a partir de la ecuación ①.

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y = \frac{2}{3} \qquad ①$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y = \frac{5}{4} \qquad ②$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

1. Despejar x de ① :

$$x = \frac{8}{9} + \frac{4}{15}y \qquad ①'$$

2. Sustituir ①' en ② :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{8}{9} + \frac{4}{15}y\right) + \frac{3}{5}y = \frac{5}{4} \qquad ③$$

CONTINÚA

158

3. Resolver la ecuación ③ :

$$\frac{16}{27} + \frac{8}{45}\,y + \frac{3}{5}\,y = \frac{5}{4}$$

$$\frac{8}{45}\,y + \frac{3}{5}\,y = \frac{5}{4} - \frac{16}{27}$$

$$\left(\frac{8}{45} + \frac{3}{5}\right)y = \frac{5}{4} - \frac{16}{27}$$

$$\frac{8 + 27}{45}\,y = \frac{135 - 64}{108}$$

$$\frac{35}{45}\,y = \frac{71}{108}$$

$$\frac{7}{9}\,y = \frac{71}{108}$$

$$y = \frac{71 \times 9}{108 \times 7} = \frac{639}{756}$$

$$\boxed{y = \frac{71}{84}}$$ ☑

4. Calcular x de ① :

$$x = \frac{8}{9} + \frac{4}{15}\left(\frac{71}{84}\right)$$

$$x = \frac{8}{9} + \frac{284}{1260}$$

$$x = \frac{1120 + 284}{1260}$$

$$x = \frac{1404}{1260}$$

$$\boxed{x = \frac{39}{35}}$$ ☑

2.3.7.1

Práctica adicional de
resolución de sistemas de ecuaciones
de la forma:

$a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$
y expresados en forma de fracción común,

si se considera necesario.

159

Resolver el sistema

$$0.75x + 0.84y = 1.57 \quad ①$$
$$0.37x + 0.45y = 0.68 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

$x = \square$ * $\quad y = \square$ *

* Aproximación en centésimas.

Respuestas
en los
cuadros siguientes

160

Estudiar con atención.

Por el método de reducción.

$$0.75x + 0.84y = 1.57 \quad ①$$
$$0.37x + 0.45y = 0.68 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

1. Multiplicar ① por 0.37:

$$0.28x + 0.31y = 0.58 \quad ①'$$

2. Multiplicar ② por -0.75:

$$-0.28x - 0.34y = -0.51 \quad ②'$$

CONTINÚA

161

3. Sumar miembro a miembro ① y ② :

$$-0.03y = 0.07$$

$$y = \frac{0.07}{-0.03}$$

$$\boxed{y = -2.33} \qquad -2.33 \in \mathbb{Q}$$

4. Calcular x de ① :

$$0.75x = 1.57 - 0.84\,(-2.33)$$
$$0.75x = 1.57 + 1.96 = 3.53$$

$$x = \frac{3.53}{0.75}$$

$$\boxed{x = 4.71} \qquad 4.71 \in \mathbb{Q}$$

5. Comprobar los resultados:

$$0.75x + 0.84y = 1.57 \qquad ①$$
$$0.37x + .045y = 0.68 \qquad ②$$

$$x = 4.71$$
$$y = -2.33$$

En ① :

$$0.75(4.71) + 0.84(-2.33) = 1.57$$
$$3.53 - 1.96 = 1.57$$
$$1.57 = 1.57 \checkmark$$

En ② :

$$0.37(4.71) + 0.45(-2.33) = 0.68$$
$$1.74 - 1.05 = 0.68$$
$$0.69 \doteq 0.68^{*} \checkmark$$

* Recordemos que el signo $\doteq$ significa "aproximadamente igual a".

2.3.7.2

Práctica adicional de
resolución de sistemas de ecuaciones
de la forma:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$
y expresados en forma de fracción decimal,

si se considera necesario.

162

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{3}\,x + \sqrt{12}\,y = \sqrt{48} & ① \\ \sqrt{12}\,x - \sqrt{27}\,y = 2\sqrt{12} & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$x = \underline{\qquad}$ $\quad y = \underline{\qquad}$

Respuestas
en los
cuadros siguientes

163

Por el método de reducción.

$$\sqrt{3}\,x + \sqrt{12}\,y = \sqrt{48} \qquad ① \qquad x, y \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt{12}\,x - \sqrt{27}\,y = 2\sqrt{12} \qquad ②$$

1. Multiplicar la ecuación ① por $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}\,x + \sqrt{12} \cdot \sqrt{12}\,y = \sqrt{48} \cdot \sqrt{12}$$
$$\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}\,x + 12\,y = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$
$$6x + 12y = 24 \qquad ①'$$

CONTINÚA

2. Multiplicar la ecuación ② por $-\sqrt{3}$:

$$-\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\,x+\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}\,y=-2\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,x+3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,y=-2\cdot2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$$

$$-6x+9y=-12 \qquad ②'$$

3. Sumar miembro a miembro ①' y ②' :

$$\begin{array}{rl} 6x+12y=24 & ①' \\ -6x+9y=-12 & ②' \\ \hline 21y=12 & \\ y=\dfrac{12}{21} & \\ \boxed{y=\dfrac{4}{7}} & \dfrac{4}{7}\in\mathcal{R} \end{array}$$

4. Calcular x de ①' :

$$6x+12y=24$$

$$6x=24-12y$$

$$x=\frac{24}{6}-\frac{12}{6}\,y$$

$$x=4-2y$$

$$x=4-2\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$x=4-\frac{8}{7}$$

$$x=\frac{28-8}{7}$$

$$\boxed{x=\frac{20}{7}} \qquad \frac{20}{7}\in\mathcal{R}$$

CONTINÚA ↓

5. Comprobar los resultados:

$$\sqrt{3}\,x + \sqrt{12}y = \sqrt{48} \qquad ①$$

$$\sqrt{12}\,x - \sqrt{27}y = 2\sqrt{12} \qquad ②$$

$$x = \frac{20}{7}$$

$$y = \frac{4}{7}$$

En ① :

$$\sqrt{3} \cdot \frac{20}{7} + \sqrt{12} \cdot \frac{4}{7} = \sqrt{48}$$

$$\frac{20\sqrt{3}}{7} + \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{20\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{28\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \ \checkmark$$

En ② :

$$\sqrt{12} \cdot \frac{20}{7} - \sqrt{27} \cdot \frac{4}{7} = 2\sqrt{12}$$

$$\frac{20 \cdot 2\sqrt{3}}{7} - \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{7} = 2 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\frac{40\sqrt{3} - 12\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{28\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \ \checkmark$$

2.3.7.3

Práctica adicional de resolución de sistemas de ecuaciones de la forma:

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
y expresados en forma de radical,

si se considera necesario.

166

Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3ix - 5iy &= 3 + 4i \quad ① \\ 4ix + iy &= 1 - 3i \quad ② \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{C}$$

x = ____ y = ____

Comprobación:

Respuestas en los cuadros siguientes

167

Por el método de reducción.

$$\left.\begin{aligned} 3ix - 5iy &= 3 + 4i \quad ① \\ 4ix + iy &= 1 - 3i \quad ② \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{C}$$

1. Multiplicar la ecuación ① por 4i:

$3i \cdot 4ix - 5i \cdot 4iy = (3 + 4i)\,4i$

$12i^2 x - 20i^2 y = 12i + 16i^2$ (recordemos que $i^2 = -1$)

$-12x + 20y = -16 + 12i \quad ①'$

CONTINÚA ↓

2. Multiplicar la ecuación ② por $-3i$:

$$-4i \cdot 3ix - i \cdot 3iy = (1 - 3i)(-3i)$$

$$-12i^2x - 3i^2y = -3i + 9i^2 \qquad (i^2 = -)$$

$$12x + 3y = -9 - 3i \qquad ②'$$

3. Sumar miembro a miembro ① y ②' :

$$-12x + 20y = -16 + 12i \qquad ①$$

$$\underline{12x + 3y = -9 - 3i \qquad ②'}$$

$$23y = -25 + 9i \qquad ③$$

4. Resolver la ecuación ③ :

$$23y = -25 + 9i$$

$$\boxed{y = -\frac{25}{23} + \frac{9}{23}\,i} \quad \left(-\tfrac{25}{23} + \tfrac{9}{23}\,i\right) \in \mathbb{C}$$

5. Calcular x de ① :

$$-12x + 20y = -16 + 12i$$

$$-12x = -16 + 12i - 20y$$

$$-12x = -16 + 12i - 20\left(-\frac{25}{23} + \frac{9}{23}\,i\right)$$

$$-12x = -16 + 12i + \frac{500}{23} - \frac{180}{23}\,i$$

$$-12x = -16 + \frac{500}{23} + 12i - \frac{180}{23}\,i$$

$$-12x = \frac{-368 + 500}{23} + \frac{276 - 180}{23}\,i$$

$$-12x = \frac{132}{23} + \frac{96}{23}\,i$$

$$x = \frac{132}{23(-12)} + \frac{96}{23(-12)}\,i$$

$$x = -\frac{132}{276} - \frac{96}{276}\,i$$

CONTINÚA ↓

169

$$\boxed{x = -\frac{11}{23} - \frac{8}{23}\,i} \quad \left(-\tfrac{11}{23} - \tfrac{8}{23}\,i\right) \in \mathbb{C}$$

6. Comprobar los resultados obtenidos:

$$\left.\begin{array}{ll} 3ix - 5iy = 3 + 4i & ① \\ 4ix + \ iy = 1 - 3i & ② \end{array}\right\} \ x, y \in \mathbb{C}$$

$$x = -\frac{11}{23} - \frac{8}{23}\,i$$

$$y = -\frac{25}{23} + \frac{9}{23}\,i$$

En ① :

$$3i\left(-\frac{11}{23} - \frac{8}{23}\,i\right) - 5i\left(-\frac{25}{23} + \frac{9}{23}\,i\right) = 3 + 4i$$

$$-\frac{33i}{23} - \frac{24i^2}{23} + \frac{125i}{23} - \frac{45i^2}{23} = 3 + 4i \quad (i^2 = -1)$$

$$\frac{24}{23} + \frac{45}{23} - \frac{33i}{23} + \frac{125i}{23} = 3 + 4i$$

$$\frac{69}{23} + \frac{92}{23}\,i = 3 + 4i$$

$$3 + 4i = 3 + 4i \ \checkmark$$

En ② :

$$4i\left(-\frac{11}{23} - \frac{8}{23}\,i\right) + i\left(-\frac{25}{23} + \frac{9}{23}\,i\right) = 1 - 3i$$

$$-\frac{44i}{23} - \frac{32i^2}{23} - \frac{25i}{23} + \frac{9i^2}{23} = 1 - 3i \quad (i^2 = -1)$$

$$\frac{32}{23} - \frac{9}{23} - \frac{44i}{23} - \frac{25i}{23} = 1 - 3i$$

$$\frac{23}{23} - \frac{69}{23}\,i = 1 - 3i$$

$$1 - 3i = 1 - 3i \ \checkmark$$

2.3.7.4

Práctica adicional de
resolución de sistemas de ecuaciones
de la forma:

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$,

si se considera necesario.

2.3.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* sistemas de ecuaciones de la forma:
  $a_1 x + b_1 y = c_1 \wedge a_2 x + b_2 y = c_2$
  y comprobar los resultados:

  – con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$
  y expresados en forma de fracción común,
  – con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$
  y expresados en forma de fracción decimal,
  – con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
  y expresados en forma de radical,
  – con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
  y expresados en la forma $m + ni$.

3.8

Sistemas "no ordenados" de dos ecuaciones con dos incógnitas

170

Por lo general,
un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas
no se presenta
ordenado así:

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

171

Por lo tanto, es necesario

transformar

las ecuaciones dadas en
sus equivalentes de la forma

$ax + by = c$

antes de resolver el sistema
por los procedimientos estudiados.

172

Resolver por el **método de reducción:**

$$\left.\begin{aligned} 8x - 5 &= 7y - 9 \\ 6x &= 3y + 6 \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Sistema equivalente "ordenado":

$$8x - 7y = -4$$
$$6x - 3y = 6$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

173

$$8x - 5 = 7y - 9$$
$$6x = 3y + 6$$

Sistema equivalente "ordenado":

$$\left.\begin{aligned} 8x - 7y &= -4 \quad (1) \\ 6x - 3y &= 6 \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Solución por el método de reducción.

$x =$ ____ $y =$ ____

Comprobación.

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 4 \end{aligned}\right\} \quad 3, 4 \in \mathbb{R}$$

174

Resolver por el **método de reducción:**

$$\left.\begin{aligned} 3(x + 2) &= 2y \\ 2(y + 5) &= 7x \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Sistema equivalente "ordenado":

$$3x - 2y = -6$$
$$-7x + 2y = -10$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

175

$3(x + 2) = 2y$

$2(y + 5) = 7x$

$3x - 2y = -6$ ①

$-7x + 2y = -10$ ②

$x, y \in \mathbb{R}$

Solución por el método de reducción.

$x =$ ____ $y =$ ____

Comprobación.

$x = 4$

$y = 9$

$4, 9 \in \mathbb{R}$

176

Resolver por el **método de igualación:**

$(x - y) - (6x + 8y) = -(10x + 5y + 3)$

$(x + y) - (9y - 11x) = 2y - 2x$

$x, y \in \mathbb{R}$

Sistema equivalente "ordenado":

$5x - 4y = -3$

$14x - 10y = 0$

$x, y \in \mathbb{R}$

177

$(x - y) - (6x + 8y) = -(10x + 5y + 3)$

$(x + y) - (9y - 11x) = 2y - 2x$

Sistema equivalente "ordenado" →

$5x - 4y = -3$ ①

$14x - 10y = 0$ ②

$x, y \in \mathbb{R}$

Solución por el método de igualación.

$x =$ ____ $y =$ ____

Comprobación.

$x = 5$

$y = 7$

$5, 7 \in \mathbb{R}$

178

Resolver:

$$\frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \qquad ①$$

$$\frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3 \qquad ②$$

Transformaciones de la ecuación ① :

Ecuación ① equivalente "ordenada":

$$\frac{4(x-3) - 3(y-4)}{12} = 0$$

$$4(x-3) - 3(y-4) = 0$$

$$4x - 12 - 3y + 12 = 0$$

$$4x - 3y = 0$$

179

$$\frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \qquad ①$$

$$\frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3 \qquad ②$$

Transformaciones de la ecuación ② :

Ecuación ② equivalente "ordenada":

$$\frac{5(x-4) + 2(y+2)}{10} = 3$$

$$5(x-4) + 2(y+2) = 30$$

$$5x - 20 + 2y + 4 = 30$$

$$5x + 2y = 30 + 20 - 4$$

$$5x + 2y = 46$$

180

$$\frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0$$

$$\frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3$$

Sistema equivalente "ordenado"

$$\left[\begin{array}{ll} 4x - 3y = 0 & ① \\ 5x + 2y = 46 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Solución por el método de sustitución.

$x =$ ____ $y =$ ____

Comprobación.

$$\left.\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 8 \end{array}\right\} \quad 6, 8 \in R$$

181

Resolver:

$$\frac{x-y-1}{x+y+1} = -\frac{3}{17} \quad ①$$

$$\frac{x+y-1}{x-y+1} = -15 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{R}$

$x+y \neq -1$

$x-y \neq -1$

Transformaciones de la ecuación ① :

Ecuación ① equivalente "ordenada": ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

$$17(x-y-1) = -3(x+y+1)$$

$$17x-17y-17 = -3x-3y-3$$

$$17x+3x-17y+3y = -3+17$$

$$20x-14y = 14$$

$$10x-7y = 7$$

182

$$\frac{x-y-1}{x+y+1} = -\frac{3}{17} \quad ①$$

$$\frac{x+y-1}{x-y+1} = -15 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{R}$ con las restricciones correspondientes.

Transformaciones de la ecuación ② :

Ecuación ② equivalente "ordenada": ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

$$x + y - 1 = -15(x - y + 1)$$

$$x + y - 1 = -15x + 15y - 15$$

$$x + 15x + y - 15y = -15 + 1$$

$$16x - 14y = -14$$

$$8x - 7y = -7$$

183

$$\frac{x - y - 1}{x + y + 1} = -\frac{3}{17}$$

$$\frac{x + y - 1}{x - y + 1} = -15$$

Sistema equivalente ordenado

$$\left.\begin{array}{l} 10x - 7y = 7 \quad ① \\ 8x - 7y = -7 \quad ② \end{array}\right\}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

Solución por cualquier método que se seleccione:

$x =$ ____ $y =$ ____

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 9 \end{array}\right\} \quad 7, 9 \in \mathbb{R}$$

184

Resolver:

$$\frac{x + y}{x - y} = 17 \quad ①$$

$$x = \frac{3}{4} \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{R}$
$x - y \neq 0$

$x =$ ____ $y =$ ____

$\boxed{x = \frac{3}{4}}$ ②

$x + y = 17(x - y)$

$x + y = 17x - 17y$

$y + 17y = 17x - x$

$18y = 16x$

$y = \frac{16x}{18}$

$y = \frac{8x}{9}$

$y = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{36}$

$\boxed{y = \frac{2}{3}}$ $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

185

$$\frac{x+y}{x-y} = 17 \qquad ①$$

$$x = \frac{3}{4} \qquad ②$$

$$y = \frac{2}{3}$$

Comprobación:

①

②

En ①:

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = 17$$

$$\frac{\frac{9+8}{12}}{\frac{9-8}{12}} = 17$$

$$\frac{17}{1} = 17$$

$17 = 17$ ◀ PCV

2.3.8.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

2.3.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* sistemas "no ordenados" de dos ecuaciones con dos incógnitas, mediante su transformación en sistemas ordenados de la forma:

  $a_1 x + b_1 y = c_1 \wedge a_2 x + b_2 y = c_2$

  con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$.

3.9

Sistemas con más de dos ecuaciones

186

Algunas situaciones pueden
conducirnos a modelos en forma de

sistemas con más de dos ecuaciones.

Este es un ejemplo de un

sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 8 \\ x - 3y + z &= 10 \\ 2x + y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

187

Atención.

Un sistema en el cual el

número de incógnitas es mayor que

el

número de ecuaciones

es un sistema

indeterminado.

188

Por ejemplo, el "sistema"

$$3x + 4y = 5$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

es **indeterminado.**

El

número de soluciones

(pares de sustitutos para x e y que satisfagan la ecuación) es

infinito.

189

El sistema

$$2x + y - z = 4 \qquad ①$$
$$x - y + z = 10 \qquad ②$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

es **indeterminado.**

190

El

método de reducción

puede ser ampliado y utilizado en la solución de

sistemas con más de dos ecuaciones,

como lo podremos ver en el ejemplo siguiente.

191

Se requiere resolver por el

método de reducción

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad ① \\ 2x - y + z &= 7 \quad ② \\ x + 2y - z &= 6 \quad ③ \end{aligned}$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

192

Estudiar con atención.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad ① \\ 2x - y + z &= 7 \quad ② \\ x + 2y - z &= 6 \quad ③ \end{aligned}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

1. Para eliminar x de las ecuaciones ① y ②, se requiere multiplicar la ecuación ① por 2, y la ecuación ② por − 1:

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ ①'

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ ②'

$2x + 2y + 2z = 24$ ①'

$-2x + y - z = -7$ ②'

193

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad ① \\ 2x - y + z &= 7 \quad ② \\ x + 2y - z &= 6 \quad ③ \end{aligned}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 24 \quad ①' \\ -2x + y - z &= -7 \quad ②' \end{aligned}$$

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ ④

ecuación suma miembro a miembro de ①' y ②'

$3y + z = 17$ ④

194

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \\ \hline 3y + z = 17 & ④ \leftarrow \text{ecuación nueva} \end{array} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

2. Para eliminar x de las ecuaciones ② y ③ , se necesita multiplicar la ecuación ② por 1, y la ecuación ③ por − 2:

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ②''

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ③''

$2x - y + z = 7$ ②''

$-2x - 4y + 2z = 12$ ③''

195

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \\ \hline 3y + z = 7 & ④ \end{array} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rl} 2x - y + z = 7 & ②'' \\ -2x - 4y + 2z = -12 & ③'' \end{array}$$

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ⑤

ecuación suma miembro a miembro de ②'' y ③''

$-5y + 3z = -5$ ⑤

196

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \\ \hline 3y + z = 17 & ④ \\ -5y + 3z = -5 & ⑤ \end{array} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Este es **un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,** que estamos capacitados para resolver.

197

3. Para eliminar y en este sistema, es necesario multiplicar ④ por 5 y ⑤ por 3:

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ④'

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ⑤'

$15y + 5z = 85$ ④'

$-15y + 9z = -15$ ⑤'

198

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 && ① \\ 2x - y + z &= 7 && ② \\ x + 2y - z &= 6 && ③ \end{aligned} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 15y + 5z &= 85 && ④' \\ -15y + 9z &= -15 && ⑤' \end{aligned}$$

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ⑥

Ecuación suma miembro a miembro de ④' y ⑤'

$14z = 70$ ⑥

199

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 && ① \\ 2x - y + z &= 7 && ② \\ x + 2y - z &= 6 && ③ \end{aligned} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$14z = 70 \quad ⑥$$

$z = \boxed{\quad}$

5 $\qquad 5 \in \mathbb{R}$

200

$$x + y + z = 12 \quad ①$$
$$2x - y + z = 7 \quad ②$$
$$x + 2y - z = 6 \quad ③$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

4. Calcular y de la ecuación ④ :

$y =$ ☐

$$3y = 17 - z$$
$$3y = 17 - 5$$
$$3y = 12$$
$$y = \frac{12}{3}$$

$\boxed{y = 4}$ $\quad 4 \in \mathbb{R}$

201

$$x + y + z = 12 \quad ①$$
$$2x - y + z = 7 \quad ②$$
$$x + 2y - z = 6 \quad ③$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$$z = 5$$
$$y = 4$$

5. Calcular x de la ecuación ① :

$x =$ ☐

$$x = 12 - y - z$$
$$x = 12 - 4 - 5$$
$$x = 12 - 9$$

$\boxed{x = 3}$ $\quad 3 \in \mathbb{R}$

202

$$x + y + z = 12 \quad ①$$
$$2x - y + z = 7 \quad ②$$
$$x + 2y - z = 6 \quad ③$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$x = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 5$

6. Comprobación:

☐ ①

☐ ②

☐ ③

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\left.\begin{aligned} 3 + 4 + 5 &= 12 \\ 12 &= 12 \end{aligned}\right\} \ ① \leftarrow \text{PCV}$$

$$\left.\begin{aligned} 2(3) - 4 + 5 &= 7 \\ 6 - 4 + 5 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}\right\} \ ② \leftarrow \text{PCV}$$

$$\left.\begin{aligned} 3 + 2(4) - 5 &= 6 \\ 3 + 8 - 5 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}\right\} \ ③ \leftarrow \text{PCV}$$

203

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad ① \\ 2x - y + z &= 7 \quad ② \\ x + 2y - z &= 6 \quad ③ \end{aligned} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Conjunto solución:

$$\underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$$

por comprensión — por extensión

Respuesta en el cuadro siguiente

$$S = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 12 \wedge 2x - y + z = 7 \wedge x + 2y + z = 6\}$$

$$= \{(3, 4, 5)\}$$

(3 ↑ x, 4 ↑ y, 5 ↑ z)

204

$$\begin{cases} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y + z = 6 & ③ \end{cases} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Resumen del procedimiento:

1. Eliminar $\underline{x}$ de ① y ②
2. Eliminar $\underline{x}$ de ② y ③
   - sistema reducido: $\begin{cases} 3y + z = 17 & ④ \\ -5y + 3z = -5 & ⑤ \end{cases}$
3. Eliminar $\underline{y}$ de ④ y ⑤ y calcular z
4. Calcular $\underline{y}$ de ④ o de ⑤
5. Calcular $\underline{x}$ de ① o de ② o de ③
6. Comprobar los resultados
7. Escribir el conjunto solución

205

El procedimiento estudiado puede ser generalizado para encontrar la solución de cualquier

sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

206

Resolver:

$2x + y - 3z = -1$ ①

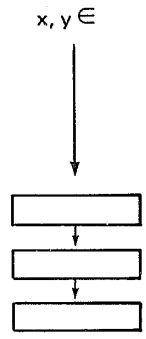
$x - 3y - 2z = -12$ ②

$3x - 2y - z = -5$ ③

$x = \square$

$y = \square$

$z = \square$



$x = 1$
$y = 3$ } $1, 3, 2 \in \mathbb{R}$
$z = 2$

207

Resolver:

$2x + 4y + 3z = 3$ ①

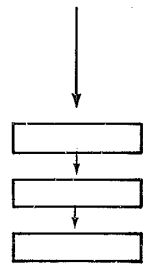
$10x - 8y - 9z = 0$ ②

$4x + 4y - 3z = 2$ ③

$x = \square$

$y = \square$

$z = \square$



$x = 1/2$
$y = 1/4$ } $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$
$z = 1/3$

208

Resolver:

$x + y = 1$ ①

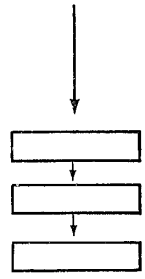
$y + z = -1$ ②

$z + x = -6$ ③

$x = \square$

$y = \square$

$z = \square$



Respuesta.
en los
cuadros siguientes

209

$$x + y = 1$$
$$y + z = -1 \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$
$$z + x = -6$$

Sistema equivalente "ordenado":

$$\begin{cases} x + y + 0 = 1 & ① \\ 0 + y + z = -1 & ② \\ x + 0 + z = -6 & ③ \end{cases}$$

210

1. Eliminar x de las ecuaciones ① y ③ :

$$\begin{array}{rll} x + y + 0 = 1 & ① \\ -x - 0 - z = 6 & ③ \\ \hline y - z = 7 & ④ \end{array}$$

Nota: no es posible eliminar x de las ecuaciones ① y ②

211

2. Formar un sistema reducido con las ecuaciones ② y ④ :

$$y + z = -1 \quad ②$$
$$y - z = 7 \quad ④$$

3. Eliminar z de ② y ④ , y calcular **y**:

$$\begin{array}{rll} y + z = -1 & ② \\ y - z = 7 & ④ \\ \hline 2y = 6 \end{array}$$

$$\boxed{y = 3} \qquad 3 \in \mathbb{R}$$

212

4. Calcular z de ② :

$z = -1 - y$

$z = -1 - 3$

$\boxed{z = -4}$ $\quad -4 \in \mathbb{R}$

5. Calcular x de ① :

$x = 1 - y$

$x = 1 - 3$

$\boxed{x = -2}$ $\quad -2 \in \mathbb{R}$

213

6. Comprobar: $x = -2 \quad y = 3 \quad z = -4$

$x + y = 1$
$(-2) + 3 = 1$
$-2 + 3 = 1$
$1 = 1$ ◀ PCV

$y + z = -1$
$3 + (-4) = -1$
$3 - 4 = -1$
$-1 = -1$ ◀ PCV

$z + x = -6$
$-4) + (-2) = -6$
$-4 - 2 = -6$
$-6 = -6$ ◀ PCV

2.3.9.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario

214

Estamos capacitados para resolver el sistema que hemos construido como modelo para el

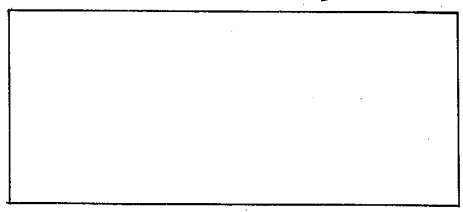
problema de las 20 monedas.

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = 20 & ① \\ 20x + 50y = 500 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{N}$$

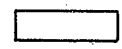
215

Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = 20 & ① \\ 20x + 50y = 500 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{N}$$



x = ____ y = ____



Por reducción:

$$\begin{array}{r} 20x + 20y = 400 \\ -20x - 50y = -500 \\ \hline -30y = -100 \end{array}$$

$$y = -100/-30$$

- $\boxed{y = 10/3}$ $\quad 10/3 \notin \mathbb{N}$

De ①:

$$x = 20 - y$$

$$x = 20 - 10/3$$

$$x = \frac{60 - 10}{3}$$

- $\boxed{x = \frac{50}{3}}$ $\quad 50/3 \notin \mathbb{N}$

216

El par de sustitutos

$$x = 50/3$$
$$y = 10/3$$

(no) es solución del sistema dado, pues a pesar de que satisfacen las ecuaciones,

$\boxed{50/3}$ y $\boxed{10/3}$ **no están en el dominio:** $\mathbb{N}$

El problema requería como solución, un número natural de monedas de 20 y 50 centavos.

217

No hay manera de
"cambiar" **cinco pesos**
en un total de
20 monedas de 20 y 50 centavos.
Por tal razón
no existe ningún riesgo
al ofrecer cualquier
cantidad de dinero como
recompensa por la solución.

2.3.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* un sistema dado de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, por el método de reducción; comprobar los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

3.10

Método de determinantes

218

Sea el sistema

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad ①$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2 \qquad ②$$

que procederemos a resolver por el **método de reducción.**

Para eliminar x de las ecuaciones ① y ② se requiere multiplicar la ecuación ① por a_2, y la ecuación ② por $-a_1$:

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad ①'$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad ②'$$

$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$

$-a_1 a_2 x - a_1 b_2 y = -a_1 c_2$

219

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad ①$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2 \qquad ②$$

$$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1 \qquad ①'$$

$$-a_1 a_2 x - a_1 b_2 y = -a_1 c_2 \qquad ②'$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad ③$$

Ecuación suma miembro a miembro de ①' y ②'

$(a_2 b_1 - a_1 b_2)\, y = a_2 c_1 - a_1 c_2$

220

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad ①$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2 \qquad ②$$

$$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1 \qquad ①'$$
$$-a_1 a_2 x - a_1 b_2 y = -a_1 c_2 \qquad ②'$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)\, y = a_2 c_1 - a_1 c_2 \qquad ③$$

$y =$ [ ]

$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

221

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad ①$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2 \qquad ②$$

$$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1 \qquad ①'$$
$$-a_1 a_2 x - a_1 b_2 y = -a_1 c_2 \qquad ②'$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)\, y = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$\boxed{y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}$$

Calcular ahora x, eliminando y de las ecuaciones ① y ② :

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1 \qquad ①''$$
$$-a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -b_1 c_2 \qquad ②''$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = b_2 c_1 - b_1 c_2$$

$$\boxed{x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}$$

222

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}} \qquad \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

Multiplicando numerador y denominador por -1, y reordenando:

$$\boxed{x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}} \qquad \boxed{y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Solución general del sistema

223

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad ①$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad ②$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Observemos que el numerador y el denominador de ambas expresiones racionales tienen la forma

$$ab - cd$$

224

Escribamos la expresión

$$ab - cd$$

en la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$$

225

Entonces, definimos:

$$\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = a \cdot b - c \cdot d$$

Llamemos a un arreglo tal de números

determinante de segundo orden.

226

Escribir el numerador y el denominador en forma de

determinantes:

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

227

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

De manera similar:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

228

El sistema "ordenado" ⟶ $\boxed{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}}$ ①
②

$$\bullet\ x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \bullet\ y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Para $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

229

Estudiar con mucha atención.

$$\begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y = c_1 & ① \\ a_2 x + b_2 y = c_2 & ② \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

Δx: determinante para x

Δ: determinante del sistema

230

$$\begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y = c_1 & ① \\ a_2 x + b_2 y = c_2 & ② \end{array}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Δy: determinante para y

Δ: determinante del sistema

231

Hagamos
algunos ejercicios
de

evaluación de determinantes.

232

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1x4 - 2x3 = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$$

- $2 \times 1 - 3 \times 5$

  $2 - 15$

- -13

233

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$$

- $3 \times 3 - 4 \times 5$

  $9 - 20$

- -11

234

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \square = \square$$

- $1 \times 1 - 2 \times 1$

  $1 - 2$

- -1

235

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = \square = \square$$

- $3 \times 10 - 6 \times 5$

  $30 - 30$

- 0

236

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \square = \square$$

- $5 \times 0 - 2 \times 3$

  $0 - 6$

- -6

237

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad}$$

- $1(-1) - 1 \times 1$
  $-1-1$
- -2

238

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad}$$

- $3 \times 3 - 5(-4)$
  $9 + 20$
- 29

239

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad}$$

- $(-2)(2) - (-3)(-4)$
  $-4-12$
- -16

2.3.10.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

240

Ahora, resolveremos por **determinantes** el sistema

$$\left.\begin{aligned} 10x - 3y &= 36 \quad ① \\ 2x + 5y &= -4 \quad ② \end{aligned}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

1. Formar y evaluar el **determinante del sistema:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$10 \times 5 - 2(-3) = 50 + 6 = 56$

241

$$\begin{aligned} 10x - 3y &= 36 \quad ① \\ 2x + 5y &= -4 \quad ② \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \times 5 - 2(-3) = 50 + 6 = 56$$

2. Formar y evaluar el **determinante para x**
[en el determinante del sistema (Δ) se sustituyen los coeficientes de x por los términos independientes]:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 36 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad}$$

$36 \times 5 - (-4)(-3) = 180 - 12 = 168$

242

$$10x - 3y = 36 \quad ①$$
$$2x + 5y = -4 \quad ②$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \times 5 - (2)(-3) = 50 + 6 = 56$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 36 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 36 \times 5 - (-4)(-3) = 180 - 12 = 168$$

3. Formar y evaluar el **determinante para y** [sustituir en el determinante del sistema (Δ) los coeficientes de y por los términos independientes]:

$\Delta y =$ [ ] = [ ] = [ ]

$\begin{vmatrix} 10 & 36 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10(-4) - 2 \times 36 = -40 - 72 = -112$

243

$$10x - 3y = 36 \quad ①$$
$$2x + 5y = -4 \quad ②$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \times 5 - 2(-3) = 50 + 6 = 56$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 36 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 36 \times 5 - (-4)(-3) = 168$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 10 & 36 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10(-4) - 2 \times 36 = -112$$

4. Determinar x e y:

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} =$ [ ] = [ ] $y = \frac{\Delta y}{\Delta} =$ [ ] = [ ]

- $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{168}{56}$

$\boxed{x = 3}$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-112}{56}$

- $\boxed{y = -2}$

244

Estudiar con atención el procedimiento completo en el siguiente cuadro

245

$$\left.\begin{array}{rl} 10x - 3y = 36 & ① \\ 2x + 5y = -4 & ② \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

- $\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \times 5 - 2(-3) = 56$

- $\Delta_x = \begin{vmatrix} 36 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 36 \times 5 - (-4)(-3) = 168$

- $\Delta_y = \begin{vmatrix} 10 & 36 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10(-4) - 2 \times 36 = -112$

- $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{168}{56} = 3$

$3, -2 \in \mathbb{R}$

- $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-112}{56} = -2$

246

Resolver por el **método de determinantes** los siguientes sistemas, resueltos previamente por otros métodos:

$x, y \in \mathbb{R}$

1.	$x + y = 13$ $x - y = 1$	$x = 7$ $y = 6$	5.	$x + 4y = 5$ $-x - y = 1$	$x = -3$ $y = 2$
2.	$x + y = 18$ $2x + y = 28$	$x = 10$ $y = 8$	6.	$6x - 10y = -2$ $3x + 5y = 5$	$x = 2/3$ $y = 3/5$
3.	$x - y = -9$ $x + y = -3$	$x = -6$ $y = 3$	7.	$3x - 4y = 0$ $5x + 3y = 29$	$x = 4$ $y = 3$
4.	$-2x - 4y = -16$ $-3x + 2y = 16$	$x = -2$ $y = 5$	8.	$-10x - 3y = -53$ $30x + y = 151$	$x = 5$ $y = 1$

2.3.10.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario

247

El método de

determinantes

puede ampliarse para resolver

un sistema de más de dos ecuaciones

con el correspondiente número de incógnitas.

248

Por ejemplo, un sistema de tres ecuaciones
con tres incógnitas, como éste

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad ① \\ 2x - y + z &= 7 \quad ② \\ x + 2y - z &= 6 \quad ③ \end{aligned}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

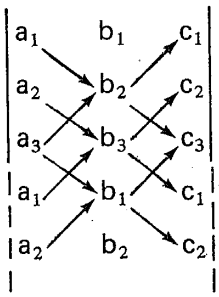
puede ser resuelto por medio de **determinantes**
de tercer orden de la forma

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

249

Evaluación de un **determinante de tercer orden:**

Fila 1
Fila 2
Fila 3



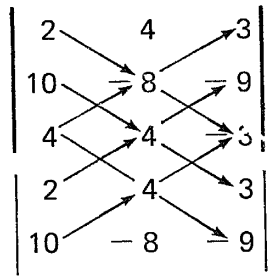
$$= (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3)$$

250

Calcular el valor del determinante de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 10 & -8 & -9 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente



$$= [2(-8)(-3) + 10 \times 4 \times 3 + 4 \times 4(-9)] - [4(-8)3 + 2 \times 4 \times (-9) + 10 \times 4(-3)]$$

$$= (48 + 120 - 144) - (-96 - 72 - 120)$$

$$= 24 - (-288) = 24 + 288 = 312$$

251

Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = [3(-8)(-3) + 0 \times 4 \times 3 + 2 \times 4(-9)] - [(2(-8)3 + 3 \times 4(-9) + 0 \times 4(-3)]$$

$$= (72 + 0 - 72) - (-48 - 108 + 0)$$

$$= 0 - (-156) = 0 + 156 = 156$$

252

Ahora bien, la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \end{array}\right\} \; x, y, z \in \mathbb{R}$$

está dada por:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Si $\Delta \neq 0$

253

1. Determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \end{array}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 4 + 1) - (-1 + 2 - 2) = 6 - (-1) = 7$$

254

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \end{array}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

2. Determinante para x:

$$\Delta_x = \boxed{\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad}$$

Formado a partir de Δ, sustituyendo los coeficientes de x por los términos independientes.

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad (1) \\ 2x - y + z &= 7 \quad (2) \\ x + 2y - z &= 6 \quad (3) \end{aligned}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (12 + 14 + 6) - (-6 + 24 - 7) = 32 + (-11) = 21$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

255

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad (1) \\ 2x - y + z &= 7 \quad (2) \\ x + 2y - z &= 6 \quad (3) \end{aligned}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

3. Determinante para y:

$$\Delta_y = \boxed{} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\quad}$$

Formado a partir de Δ, sustituyendo los coeficientes de y por los términos independientes.

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad (1) \\ 2x - y + z &= 7 \quad (2) \\ x + 2y - z &= 6 \quad (5) \end{aligned}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = (-7 + 12 + 12) - (7 + 6 - 24) = 17 - (-11) = 28$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

256

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \end{array}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

4. Determinante para z:

$$\Delta_z = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$$

Formado a partir de Δ, sustituyendo los coeficientes de z por los términos independientes.

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \end{array}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-6 + 48 + 7) - (-12 + 14 + 12) = 49 - 14 = 35$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

257

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z = 12 & ① \\ 2x - y + z = 7 & ② \\ x + 2y - z = 6 & ③ \end{array}\right\} \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$\Delta = 7 \qquad \Delta_x = 21 \qquad \Delta_y = 28 \qquad \Delta_z = 35$

5. Cálculo de las incógnitas:

- $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \boxed{} = \boxed{}$
- $y = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$
- $z = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \quad ① \\ 2x - y + z &= 7 \quad ② \\ x + 2y - z &= 6 \quad ③ \end{aligned} \Big\} \; x, y, z \in \mathbb{R}$$

- $\Delta = 7$
- $\Delta_x = 21$
- $\Delta_y = 28$
- $\Delta_z = 35$

- $x = \dfrac{21}{7} = 3$
- $y = \dfrac{28}{7} = 4$
- $z = \dfrac{35}{7} = 5$

$3, 4, 5 \in \mathbb{R}$

2.3.10.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.3.10

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de determinantes; comprobar los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión;
- *resolver* sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas por el método de determinantes; comprobar los resultados, y escribir el conjunto solución por comprensión o por extensión.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100